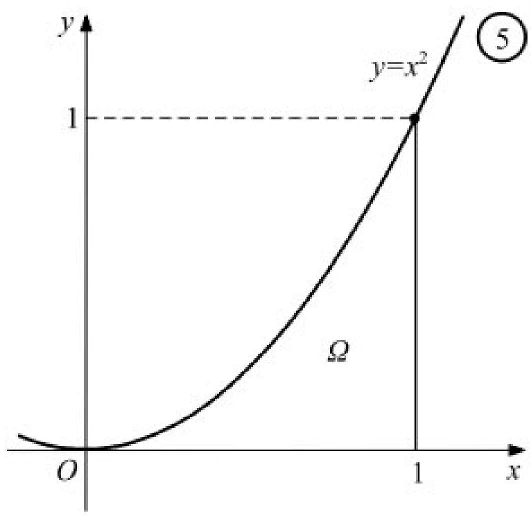
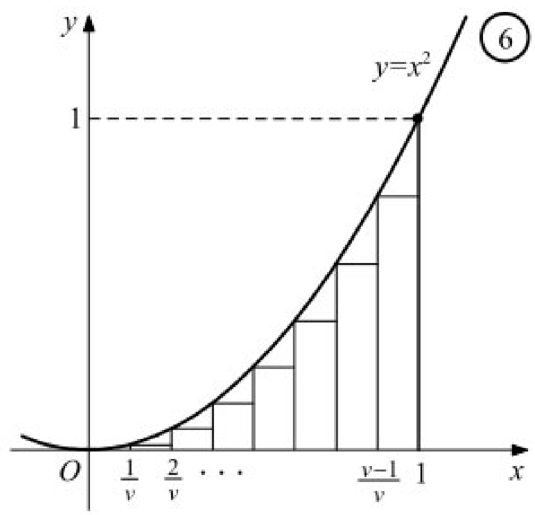
3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Εμβαδόν παραβολικού χώρου

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ (Παραβολικό χωρίο Σχ. 5).





Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής :

Χωρίζουμε το διάστημα [0,1] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \dfrac{1}{\nu}$ με άκρα τα σημεία :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{\nu}, \quad x_2 = \frac{2}{\nu}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad x_{\nu-1} = \frac{\nu-1}{\nu}, \quad x_\nu = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

● Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το :

$$\varepsilon_\nu = f(0)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu}\left[0^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]$$

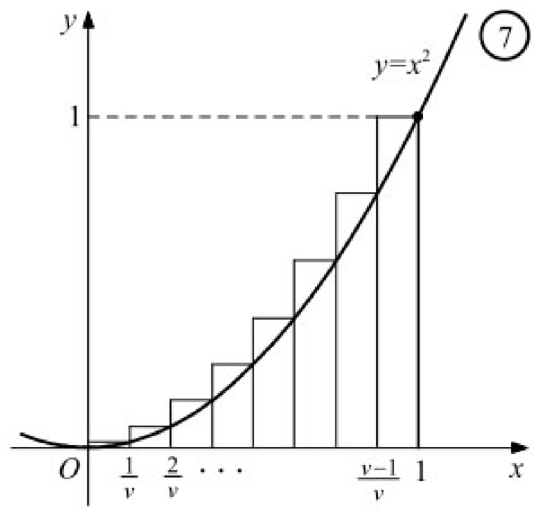
$$= \frac{1}{\nu^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2]$$

$$= \frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{2\nu^2 - 3\nu + 1}{6\nu^2}.$$

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,



$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2 + 3\nu + 1}{6\nu^2}.$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν Ε βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν. Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu$, οπότε

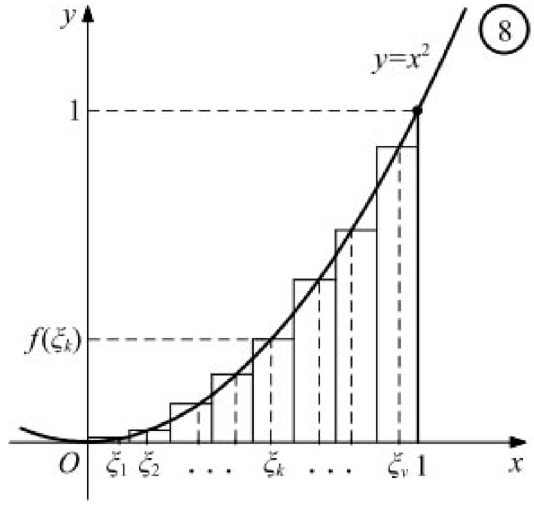
$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu \le E \le \lim_{\nu\to\infty} E_\nu .$$

Επειδή $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = \lim_{\nu\to\infty} E_\nu = \frac{1}{3}$, έχουμε $E = \frac{1}{3}$.

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1,2,...,\nu$ και ύψη την τιμή της συνάρτησης σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο ξ_κ, $\kappa = 1,2,......,\nu$, καθενός διαστήματος, (Σχ. 8), τότε το άθροισμα

$$S_\nu = \frac{1}{\nu} f(\xi_1) + \frac{1}{\nu} f(\xi_2) + \cdots + \frac{1}{\nu} f(\xi_\nu)$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού.



Επειδή $f(x_{\kappa-1}) \le f(\xi_\kappa) \le f(x_\kappa)$ για $\kappa = 1,2,......,\nu$, θα είναι

$$\frac{1}{\nu} f(x_{\kappa-1}) \le \frac{1}{\nu} f(\xi_\kappa) \le \frac{1}{\nu} f(x_\kappa),$$

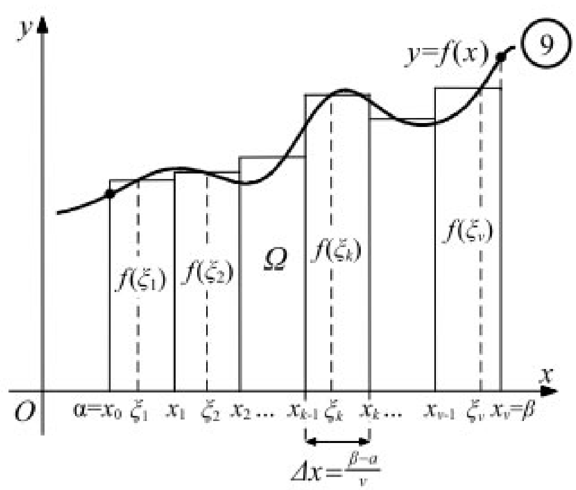
οπότε θα ισχύει

$$\varepsilon_\nu \le S_\nu \le E_\nu$$

Είναι όμως, $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} E_\nu = E$. Άρα θα ισχύει $\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = E$.

Ορισμός εμβαδού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.



Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχ. 9) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή:

● Χωρίζουμε το διάστημα [α,β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$.

● Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

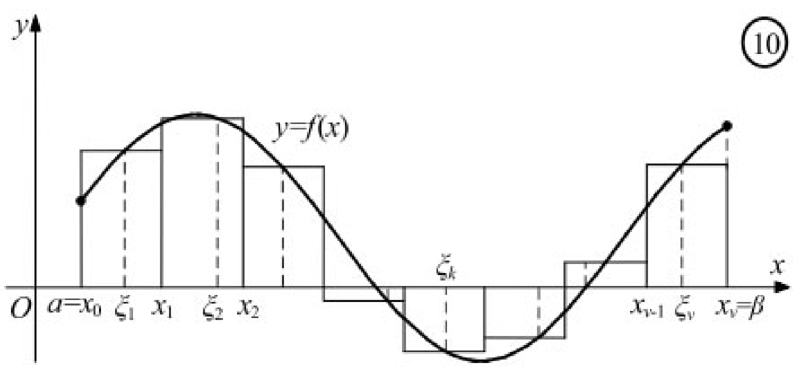
$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$$

● Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu \to \infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu \to \infty} S_\nu$ υπάρχει στο **R** και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με **Ε(Ω)**. Είναι φανερό ότι Ε(Ω) ≥ 0.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο [α,β]. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα [α,β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε κ ∈ {1,2,...,ν}, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής :

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x^{(1)} .$$

(1) *Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.*

Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος S_ν , δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο **R** και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

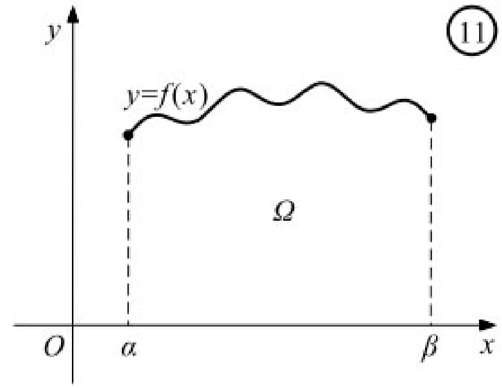
Το σύμβολο ∫ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$, συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.

Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι α > β ή α = β, ως εξής :

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι :

Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ϵ [α,β], τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που



περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x′x και τις ευθείες x = α και x = β (Σχ. 11). Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega)\,.$$

Επομένως,

$$\boxed{\text{Αν}\quad f(x)\geq 0\,,\quad \text{τότε}\quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0\,.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta-\alpha)$, για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_\alpha^\alpha c\,dx = 0 = c(\alpha-\alpha) = c(\beta-\alpha)$.

ii) Αν $\alpha<\beta$, τότε, επειδή η $f(x)=c$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, έχουμε

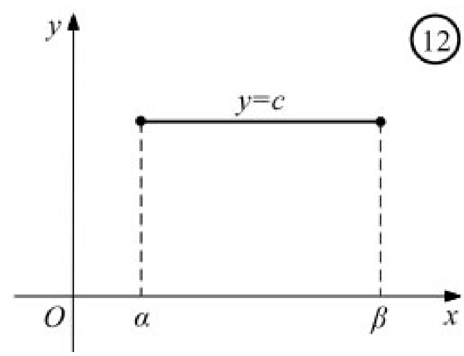
$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta c\,dx &= \int_\alpha^\beta f(x)dx\\ &= \lim_{\nu\to\infty}[(f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu))\Delta x]\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_\nu)]\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{\nu}(c+c+\cdots+c)\right)\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot \nu c\right) = c(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

iii) Αν $\alpha>\beta$, τότε

$$\int_\alpha^\beta c\,dx = -\int_\beta^\alpha c\,dx = -c(\alpha-\beta) = c(\beta-\alpha).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν c > 0, τότε το $\int_\alpha^\beta c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β − α και ύψος c (Σχ. 12).



Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g σ υ ν ε χ ε ί ς συναρτήσεις στο [α,β] και λ, μ ϵ **R**. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

και γενικά

- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και α, β, γ ϵ Δ, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3 + 7 = 4.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι :

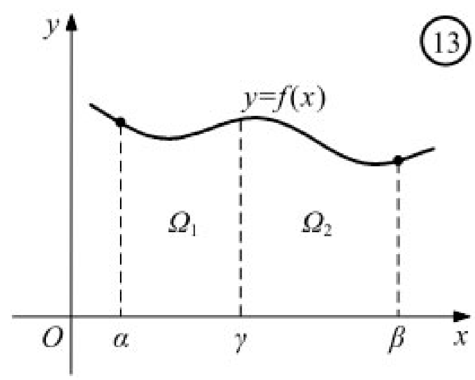
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx, \quad E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

και

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε x ϵ [α,β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\int_1^4 f(x)dx = 9$, $\int_3^4 f(x)dx = 11$ και $\int_1^8 f(x)dx = 13$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i) $\int_4^3 f(x)dx$ ii) $\int_4^8 f(x)dx$

iii) $\int_1^3 f(x)dx$ iv) $\int_3^8 f(x)dx$.

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e \ln t dt = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt.$$

3. Να υπολογίσετε το κ έτσι, ώστε

$$\int_1^\kappa \frac{x^2-4}{x^2+1} dx - \int_\kappa^1 \frac{5}{x^2+1} dx = 3.$$

4. Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$ και $\int_1^3 g(x)dx = -2$ και να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i) $\int_1^3 (2f(x) - 6g(x))dx$ ii) $\int_3^1 (2f(x) - g(x))dx$.