Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Πίνακες ΙΙ

Ορισμοί

- * Ένας πίνακας καλείται κλιμακωτός (πίνακας σε κλιμακωτή μορφή) αν:
  1. Εφόσον υπάρχουν μηδενικές γραμμές, βρίσκονται στο κάτω μέρος του πίνακα.
  2. Κάθε οδηγό στοιχείο μιας γραμμής (πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της γραμμής), βρίσκεται δεξιά από το οδηγό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.
- ** Ένας πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή αν:
  1. Είναι κλιμακωτός.
  2. Κάθε οδηγό στοιχείο ισούται με 1.
  3. Κάθε οδηγό στοιχείο είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στην αντίστοιχη στήλη.

Πίνακας σε Κλιμακωτή Μορφή

Για να είναι λοιπόν ένας πίνακας *nxm* σε κλιμακωτή μορφή πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες:
(1) Εφόσον υπάρχουν μηδενικές γραμμές, αυτές πρέπει να βρίσκονται στο κάτω μέρος του πίνακα.
(2) Κάθε οδηγό στοιχείο μιας γραμμής (πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της γραμμής), πρέπει να βρίσκεται δεξιά από το οδηγό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.

Παραδείγματα Πινάκων σε Κλιμακωτή Μορφή

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί Γραμμών

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις:

- Αμοιβαία ανταλλαγή δύο γραμμών L_i, L_j $(L_i \leftrightarrow L_j)$.
- Αντικατάσταση μιας γραμμής L_i με ένα μη-μηδενικό πολλαπλάσιο του εαυτού της kL_i $(L_i \to kL_i)$.
- Αντικατάσταση μιας γραμμής L_i με το άθροισμα ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής kL_j και της ίδιας $(L_i \to L_i + kL_j)$.

Βήματα Μετασχηματισμού Πίνακα σε Κλιμακωτή Μορφή

Για τον μετασχηματισμό ενός πίνακα A σε κλιμακωτή μορφή, ακολουθείται ουσιαστικά η απαλοιφή GAUSS, ως εξής:

- Εύρεση της πρώτης στήλης με μια μη-μηδενική καταχώρηση (έστω j_1).
- Ανταλλαγή μεταξύ των γραμμών (εφόσον χρειάζεται), έτσι ώστε $a_{1j_1} \neq 0$
- Χρήση του a_{1j_1} ως οδηγού στοιχείου, για τοποθέτηση μηδενικών στοιχείων κάτω από αυτόν.
- Υπολογίζουμε τον συντελεστή $k = -a_{ij_1}/a_{1j_1}$.
- Αντικατάσταση της γραμμής R_i με $R_i + kR_1$.
- Επανάληψη των προηγούμενων βημάτων εως ότου οδηγηθούμε σε κλιμακωτό πίνακα.

Παράδειγμα Μετασχηματισμού Πίνακα σε Κλιμακωτή Μορφή

Έστω ο ακόλουθος πίνακας, τον οποίο θέλουμε να ανάγουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε τον a_{11} ως οδηγό και έπειτα αντικαθιστούμε $(R_2 \to R_2 - 2R_1)$ και $(R_3 \to R_3 - 3R_1)$. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Ακολούθως, χρησιμοποιούμε τον a_{23} ως οδηγό και έπειτα αντικαθιστούμε $(R_3 \to R_3 - \frac{5}{4}R_2)$. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Άσκηση - Πίνακας σε Κλιμακωτή Μορφή

Να αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή ο πίνακας A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Πίνακας σε Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή

Για να είναι ένας πίνακας *nxm* σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες:
(1) Ο πίνακας να είναι κλιμακωτός.
(2) Κάθε οδηγό στοιχείο να ισούται με 1.
(3) Κάθε οδηγό στοιχείο είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στην αντίστοιχη στήλη.

<u>Παραδείγματα Πινάκων σε Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήματα Μετασχηματισμού Πίνακα σε Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή

Για τον μετασχηματισμό ενός πίνακα A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, ακολουθείται η εξής διαδικασία (δεδομένου ότι ο πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή):

- Πολλαπλασιασμός της τελευταίας μη-μηδενικής γραμμής R_r με το $1/a_{rj_r}$ (όπου a_{rj_r} το οδηγό στοιχείο της γραμμής)
- Χρήση του a_{ij_r} (το οποίο ισούται με 1) ως οδηγού στοιχείου, για τοποθέτηση μηδενικών στοιχείων πάνω από αυτό.
- Θετουμε $m = -a_{ij_r}$ (όπου m ο συντελεστής της R_r).
- Αντικατάσταση της γραμμής R_i με $R_i + mR_r$.
- Επανάληψη των προηγούμενων βημάτων εως ότου οδηγηθούμε σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Παράδειγμα Μετασχηματισμού Πίνακα σε Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή

Έστω ο ακόλουθος κλιμακωτός πίνακας, τον οποίο θέλουμε να ανάγουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Αρχικά μετασχηματίζουμε την 3η γραμμή $(R_3 \to \frac{1}{7}R_3)$ και έπειτα $(R_2 \to R_2 - 3R_3)$ και $(R_1 \to R_1 - 6R_3)$.
2. Μετασχηματίζουμε $(R_2 \to \frac{1}{2}R_2)$ και έπειτα $(R_1 \to R_1 + 9R_2)$.
3. Τέλος μετασχηματίζουμε $(R_1 \to \frac{1}{5}R_1)$.

Άσκηση - Πίνακας σε Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή

Να αναχθεί σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ο πίνακας A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{bmatrix}$$

Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A θα έχει αντίστροφο τον πίνακα B ($A^{-1} = B$) αν ισχύει:

$$[A|I] \xrightarrow{Elementary\ \ Row\ \ Operations} [K|B]$$

όπου:
$K = I$ (μοναδιαίος πίνακας)

***Αν $K \neq I$ τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος**

Παράδειγμα Εύρεσης Αντίστροφου Πίνακα (1/3)

Να βρεθεί ο αντίστροφός του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 11 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα Εύρεσης Αντίστροφου Πίνακα (2/3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 11 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\textit{row echelon form}]{R_3 \to R_3 + R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 9R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 9/2 & 11/2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 5R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5/2 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & -5 & 0 & 9/2 & 11/2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα Εύρεσης Αντίστροφου Πίνακα (3/3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5/2 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & -5 & 0 & 9/2 & 11/2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5/2 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 & -11/10 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/10 & -3/10 & 9/10 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 & -11/10 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] = [K|B] = [I|A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/10 & -3/10 & 9/10 \\ -9/10 & -11/10 & 13/10 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -7 & -3 & 9 \\ -9 & -11 & 13 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση - Αντίστροφος Πίνακας

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος Gauss-Jordan

Ο αλγόριθμος Gauss-Jordan χρησιμοποιείται για τον μετασχηματισμό ενός πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Η διαφορά του ως προς τον αλγόριθμο Gauss, έγκειται στο οτι ο αλγόριθμος Gauss-Jordan τοποθετεί μηδενικά στοιχεία κάτω και πάνω από το οδηγό στοιχείο, καθώς διαγράφει την πορεία του από την πρώτη γραμμή του πίνακα προς την τελευταία.

Παράδειγμα Gauss-Jordan (1/3)

Να βρεθεί ο αντίστροφός του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to (-1)R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 13 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 13 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα Gauss-Jordan (2/3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 13 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5} R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9/5 & 1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 13/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2} R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9/5 & 1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 13/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα Gauss-Jordan (3/3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9/5 & 1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 13/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{13}{5} R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9/5 & 1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 & -11/10 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{9}{5} R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/10 & -3/10 & 9/10 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 & -11/10 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] = [K|B] = [I|A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/10 & -3/10 & 9/10 \\ -9/10 & -11/10 & 13/10 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -7 & -3 & 9 \\ -9 & -11 & 13 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Ορισμοί - Θεωρήματα

- Ένας πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα B ($A \sim B$), αν ο πίνακας B μπορεί να ληφθεί από τον A μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.
- Κάθε πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν μοναδικό πίνακα B που βρίσκεται σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές.
- Ο βαθμός ενός πίνακα A ($rank(A)$), προκύπτει από το πλήθος των οδηγών στοιχείων όταν ο πίνακας A μετασχηματιστεί σε κλιμακωτή μορφή.