Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 4

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.
Δημήτρης Χρήστου-Βαρσακέλης
Καθηγητής

Οκτώβριος 2023

Θέματα 4ης διάλεξης

- Σειρές
- Σύγκλιση σειρών
- Δυναμοσειρές
- Ανάπτυγμα Taylor

Σειρές

Η έννοια της σειράς αναφέρεται στο “άθροισμα” των, άπειρου πλήθους, όρων μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών a_n:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

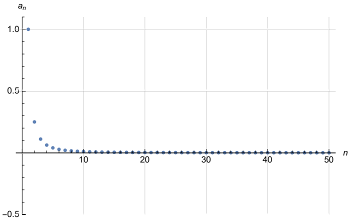
Ορίζουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της a_n ως:

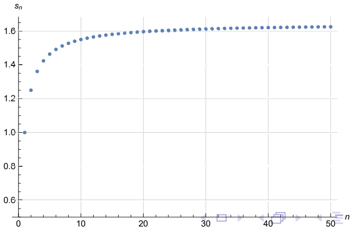
$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n^2}$. Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της a_n είναι:

$$S_1 = \frac{1}{1}$$
$$S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$$
$$S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$
$$S_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$$
$$\vdots$$
$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$





Σειρές

Το διατεταγμένο ζεύγος $((a_n), S_n)$ ονομάζεται σειρά πραγματικών αριθμών, και συμβολίζεται με

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{ ή } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ο αριθμός a_n λέγεται γενικός ή n-οστός όρος της σειράς και το άθροισμα S_n n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε ένα αριθμό $s \in \mathbb{R}$ εάν και μόνο εάν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων S_n συγκλίνει στον αριθμό s. Τότε γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \text{ ή } \lim_{n\to\infty} S_n = s$$

Ο αριθμός s λέγεται άθροισμα της σειράς.

Αν η ακολουθία S_n δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$ ή $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$).

Παραδείγματα μερικών αθροισμάτων

- Άθροισμα n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου:
  $a_1 = a,\ a_2 = a + \omega,\ a_3 = a + 2\omega,\ \ldots,\ a_n = a + (n-1)\omega$
  Εάν υπολογίσουμε το S_n έχουμε:
  $S_n = a + a + \omega + a + 2\omega + \ldots + a + (n-1)\omega = \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) n = na + \frac{n(n-1)}{2}\omega$
  Άν $\omega > 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$
- Άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου:
  $a_1 = a,\ a_2 = a\lambda,\ a_3 = a\lambda^2,\ \ldots\ a_n = a\lambda^{n-1}$
  Εάν υπολογίσουμε το S_n έχουμε:
  $S_n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \ldots + a\lambda^{n-1} = \frac{a(\lambda^n-1)}{\lambda-1}, \lambda \neq 1$
  Άν $|\lambda| < 1$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-\lambda}$, άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-\lambda}$

Κριτήριο μη σύγκλισης

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Ισοδύναμη πρόταση): Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Προσοχή: Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ δεν συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Παραδείγματα

- Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ δεν συγκλίνει διότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.
- Η **αρμονική** σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, παρόλο που $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (αποδεικνύεται με το κριτήριο σύγκλισης *Cauchy* για την S_n - Διάλεξη 3 $|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$).
- Η **αρμονική σειρά** ρ**-τάξης** ή **σειρά Dirichlet**: $\zeta(\rho) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$, συγκλίνει εάν $\rho > 1$ ενώ αποκλίνει εάν $\rho \leq 1$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Κριτήριο Σύγκρισης

Έστω $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ και $a_n \leq b_n$. Τότε:

- Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε αποκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Υπολογίστε εάν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n+1}$.

Έχουμε $3^n < 3^n + 1 \Rightarrow \frac{5}{3^n} > \frac{5}{3^n+1} \Rightarrow 5\left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{5}{3^n+1}$. Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n = 5\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ συγκλίνει ως γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{3} < 1$, άρα συγκλίνει και η αρχική.

Πόρισμα

Έστω $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Τότε:

1. Αν $0 < k < +\infty$ τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.
2. Αν $k = 0$ τότε
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε θα αποκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$
3. Αν $k = \infty$ τότε
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε θα αποκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3-1}$.

Θεωρούμε τη συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Υπολογίζουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln n}{2n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln n}{2-\frac{1}{n^3}} = 0$ (γιατί;)

Από το παραπάνω πόρισμα (2), προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει.

Κριτήριο Λόγου (D' Alembert)

Αν $a_n > 0$, τότε:

- Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, τότε η σειρά συγκλίνει για $r < 1$ και αποκλίνει για $r > 1$. Για $r = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Παρατηρούμε ότι
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n!(n+1))^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1$. Άρα η σειρά συγκλίνει.

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1} n^2}{2^n (n+1)^2} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 > 1$ άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

Κριτήριο Ρίζας (Cauchy)

Αν $a_n > 0$, τότε:

- Αν $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Αν υπάρχει το $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, τότε η σειρά συγκλίνει για $r < 1$ και αποκλίνει για $r > 1$. Για $r = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Παρατηρούμε ότι
$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right]^{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$. Άρα η σειρά συγκλίνει.

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$.

Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1\cdot 1} = 2 > 1$ άρα η σειρά αποκλίνει.

Απόλυτη σύγκλιση

Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Βάσει αυτού του θεωρήματος, μπορούμε να αντιπαρέρχουμε την απαίτηση $a_n > 0$ στο κριτήριο Λόγου και Ρίζας (χρησιμοποιώντας απόλυτη τιμή).

Προσοχή, εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε **δεν** συνεπάγεται ότι συγκλίνει και απόλυτα.

Κριτήριο Ολοκληρώματος

Ας υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είναι μία συνεχής, θετική και φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[k, \infty)$ και $f(n) = \alpha_n$. Τότε:

(1) Αν το ολοκλήρωμα $\int\limits_k^\infty f(x)dx$ συγκλίνει τότε το ίδιο ισχύει και για το $\sum\limits_{n=k}^\infty \alpha_n$.

(2) Αν το ολοκλήρωμα $\int\limits_k^\infty f(x)dx$ αποκλίνει τότε το ίδιο ισχύει και για το $\sum\limits_{n=k}^\infty \alpha_n$.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ συγκλίνει.

Η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$ έχει παράγωγο
$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) < 0$ για $x \geq 1$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty]$.
$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}[e^{-x^2}]_1^t = \frac{1}{2e}$.
Έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρώματος εφόσον το ολοκλήρωμα της $f(x)$ με $f(n) = ne^{-n^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η αντίστοιχη σειρά.

Εναλλάσσουσες σειρές

Εναλλάσσουσα σειρά ονομάζεται αυτής της οποίας οι όροι εναλλάσσουν το πρόσημό τους συνεχώς, δηλαδή είναι της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

Κριτήριο του Leibniz

Μία εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει όταν ισχύουν τα παρακάτω:

- $a_n > 0$
- είναι φθίνουσα ($a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$)
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Παραδείγματα

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ συγκλίνει.

- $a_n = \frac{1}{2n-1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n φθίνουσα αφού $a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n-1} = a_n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\rho}$, με $\rho > 0$ συγκλίνει.

- $a_n = \frac{1}{n^\rho} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n φθίνουσα αφού $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^\rho} \leq \frac{1}{n^\rho} = a_n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\rho} = 0$

Τηλεσκοπικές σειρές

Μια σειρά, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ονομάζεται τηλεσκοπική εάν μπορεί να γραφεί ως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$, όπου a_n και b_n ακολουθίες. Μια τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει εάν και μόνο εάν η ακολουθία b_n συγκλίνει, στην οποία περίπτωση ισχύει και ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Ο έλεγχος της σύγκλισης σε μια τηλεσκοπική σειρά πραγματοποιείται ως εξής:
$s_n = a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n =$
$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$, άρα η σειρά θα συγκλίνει εάν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}$ και το άθροισμά της θα είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Παράδειγμα

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ συγκλίνει.

Η σειρά είναι τηλεσκοπική αφού $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Έτσι έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ συγκλίνει.

Η σειρά είναι τηλεσκοπική αφού $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$. Έτσι έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Δυναμοσειρές

Μια δυναμοσειρά, είναι μια σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Το x μεταβάλλεται γύρω από το c, και για αυτό το λόγο λέμε ότι η σειρά έχει κέντρο c ή ότι είναι δυναμοσειρά γύρω από το σημείο c.

Δυναμοσειρές

Η πολυωνυμική συνάρτηση:

$$S_n(x) = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \cdots + a_n (x - c)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ονομάζεται μερικό άθροισμα της δυναμοσειράς και οι συναρτήσεις:

$$a_0, a_1 (x - c), a_2 (x - c)^2, \ldots, a_n (x - c)^n, \ldots$$

ονομάζονται όροι της δυναμοσειράς:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

Σύγκλιση δυναμοσειρών

- Μια δυναμοσειρά, παρόλο που ορίζεται στο $\mathbb{R}$, το σύνολο σύγκλισής της δεν είναι γενικά όλο το $\mathbb{R}$.
- Κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει στο κέντρο της, αφού για $x = c$ έχει άθροισμα το a_0.
- Εάν το c δεν είναι το μόνο σημείο που συγκλίνει η δυναμοσειρά, θα υπάρχει ένας αριθμός r με $0 < r \leq \infty$, τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει όταν $|x - c| < r$ και να αποκλίνει όταν $|x - c| > r$. Ο αριθμός r καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Κριτήριο Λόγου για δυναμοσειρές

Έστω $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και r η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Τότε

$$r = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \\ 0, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty \\ 1/\ell, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα:

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{c\}$
- συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(c-r, c+r)$. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει να ελέγξουμε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος (αντικαθιστώντας $x = c + r$ και $x = c - r$, και ελέγχοντας ως προς τη σύγκλιση τις σειρές που προκύπτουν).

Κριτήριο Ρίζας για δυναμοσειρές

Έστω $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και r η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Τότε

$$r = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0, & \text{αν } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ 1/\ell, & \text{αν } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα:

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{c\}$
- συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(c-r, c+r)$. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει να ελέγξουμε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος (αντικαθιστώντας $x = c + r$ και $x = c - r$, και ελέγχοντας ως προς τη σύγκλιση τις σειρές που προκύπτουν).

Παράδειγμα

Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = 1$ (εναλλακτικά $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \sqrt{1} = 1$)

Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = \frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης το $(c-r, c+r) = (1-1, 1+1) = (0, 2)$. Θα πρέπει να ελέγξουμε τα δύο άκρα του διαστήματος:

- Για $x = 0$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ η οποία συγκλίνει (γιατί;)
- Για $x = 2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ η οποία αποκλίνει (γιατί;)

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[0, 2)$.

Παράδειγμα

Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(x+2)^n$.

Έχουμε $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n^2 3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3}$.
Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = \frac{1}{1/3} = 3$ και το διάστημα σύγκλισης το $(c-r, c+r) = (-2-3, -2+3) = (-5, 1)$. Θα πρέπει να ελέγξουμε τα δύο άκρα του διαστήματος:

- Για $x = -5$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ η οποία συγκλίνει (γιατί;)
- Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ η οποία συγκλίνει (γιατί;)

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-5, 1]$.

Γεωμετρική ερμηνεία σύγκλισης δυναμοσειράς

Αποδείξαμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(x+2)^n$ συγκλίνει στο διάστημα [-5,1].

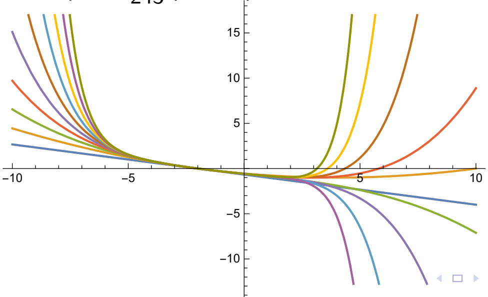
Εάν υπολογίσουμε τα μερικά αθροίσματα της δυναμοσειράς, θα έχουμε:

$$S_1 = -\frac{1}{3}(x+2)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{36}(2+x)^2$$

$$S_3 = -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{36}(2+x)^2 - \frac{1}{243}(2+x)^3$$

$$\vdots$$



Ανάπτυγμα Taylor

Αν μια συνάρτηση f είναι απείρως παραγωγίσιμη, με συνεχείς παραγώγους στην περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0, τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άπειρη σειρά:
$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$
η οποία ονομάζεται σειρά **Taylor** της συνάρτησης με κέντρο x_0.

Άν $x_0 = 0$, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin:
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$.

Ισχύει ότι $f^{(n)}(x) = e^x$ για $n = 1, 2, 3, \cdots$.
Συνεπώς $f^{(n)}(0) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Άρα το ανάπτυγμα της σειράς Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) = e^{-x} \text{ και } f(0) = 1 \\
f'(x) = -e^{-x} \text{ και } f'(0) = -1 \\
f''(x) = e^{-x} \text{ και } f''(0) = 1 \\
f'''(x) = -e^{-x} \text{ και } f'''(0) = -1 \\
\vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} \text{ και } f^{(n)}(0) = (-1)^n
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η σειρά Taylor για τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ γύρω από το $x = -4$.

$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, $f^{(n)}(-4) = (-1)^n e^4$
Συνεπώς η σειρά Taylor είναι:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^4}{n!}(x+4)^n$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = cos(x)$.

$$f(x) = cos(x) \text{ και } f(0) = 1$$
$$f^{'}(x) = -sin(x) \text{ και } f^{'}(0) = 0$$
$$f^{''}(x) = -cos(x) \text{ και } f^{''}(0) = -1$$
$$f^{'''}(x) = sin(x) \text{ και } f^{'''}(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = cos(x) \text{ και } f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(x) = -sin(x) \text{ και } f^{(5)}(0) = 0$$
$$f^{(6)}(x) = -cos(x) \text{ και } f^{(6)}(0) = -1$$

Συνεπώς:

$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

ή

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Θεώρημα Taylor

Αν μια συνάρτηση f είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη, με συνεχείς παραγώγους σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει έναν πραγματικό αριθμό x_0, τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως σειρά (δυναμοσειρά):
$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ για κάποιο $\xi \in (x_0, x)$.

Τότε, μπορούμε να προσεγγίσουμε την f ως:
$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
με υπόλοιπο (σφάλμα) της πολυωνυμικής αυτής προσέγγισης n βαθμού:
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Παράδειγμα για σειρά Taylor

Άσκηση Βρείτε την 2ης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση που βρήκατε για να εκτιμήσετε την $f(0.1)$, και δώστε ένα άνω φράγμα για το σφάλμα που προκύπτει σε αυτήν την προσέγγιση.

$$f(x) = f^{'}(x) = f^{''}(x) = f^{'''}(x) = e^x$$

Γύρω από το $x_0 = 0$, $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + x^2/2$.
Συνεπώς η προσέγγιση του $f(0.1)$ είναι $f(0.1) = 1.105$. Η πραγματική τιμή είναι $f(0.1) = 1.10517$ με διαφορά 0.00017.

Παράδειγμα για σειρά Taylor

Όσον αφορά στην εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής έχουμε $R_2(x) = \frac{M|x|^3}{3!}$ όπου το M είναι ένα άνω φράγμα για την $f'''(x)$ στο $x \in [0, 0.1]$. Στο διάστημα το οποίο μας δίνεται έχουμε $|x| \leq 0.1 \iff |x|^3 \leq 0.001$.

Επίσης, $f'''(x) = e^x \leq e^{0.1}$ στο διάστημα που μας μας δίνεται. Συνεπώς $R_2(x) = \frac{0.001e^{0.1}}{6} = 0.000184$.

Συνεπώς, η εκτίμηση του σφάλματος μέσω του υπολοίπου Taylor είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά.

Παράδειγμα για σειρά Taylor 2

Βρείτε την 2ης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = cos(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση που βρήκατε για να εκτιμήσετε την $f(0.6)$, και δώστε ένα άνω φράγμα για το σφάλμα που προκύπτει σε αυτήν την προσέγγιση.

$$f(0) = 1$$
$$f'(x) = -sin(x) \text{ και } f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -cos(x) \text{ και } f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = sin(x)$$

Γύρω από το $x_0 = 0$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$
Συνεπώς η προσέγγιση του $f(0.6)$ είναι $f(0.6) = 0.82$. Η πραγματική τιμή είναι $f(0.6) = 0.8253$ με διαφορά 0.0053.

Παράδειγμα για σειρά Taylor 2

Όσον αφορά στην εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής έχουμε $R_2(x) = \frac{M|x|^3}{3!}$ όπου το M είναι ένα άνω φράγμα για την $f'''(x)$ στο $x \in [0, 0.6]$. Στο διάστημα το οποίο μας δίνεται έχουμε $|x| \leq 0.6 \iff |x|^3 \leq 0.216$.

Επίσης, $f'''(x) = sin(x)$ με $|sin(x)| \leq 1$. Συνεπώς $|R_2(x)| \leq \frac{0.216}{6} = 0.036$.

Συνεπώς, η εκτίμηση του σφάλματος μέσω του υπολοίπου Taylor είναι μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά.

Εφαρμογή στην προσέγγιση με σειρά Taylor

Πολλές από τις σημαντικές χρήσεις του τύπου του Taylor μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση δύο μόνο όρων ($n = 2$). Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi)(x_1 - x_0)^2}{2}$$

για ξ ανάμεσα σε x_0 και x_1.
Αν μεταφέρουμε το $f(x_0)$ στο αριστερό μέλος της σχέσης και χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $dx = (x_1 - x_0)$, $dy = f'(x)dx$ και $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\Delta y = dy + \frac{f''(\xi)(x_1 - x_0)^2}{2}$$

για ξ ανάμεσα σε x_0 και x_1.

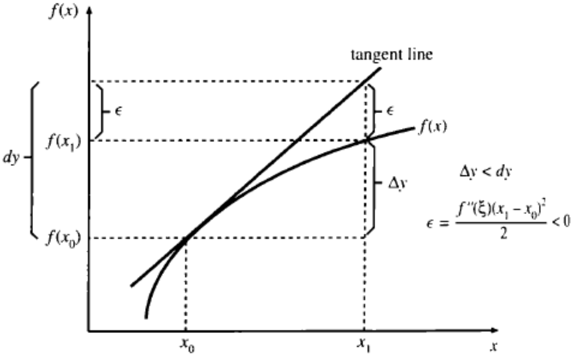
Εφαρμογή στην προσέγγιση με σειρά Taylor

Το σφάλμα είναι στην ουσία το υπόλοιπο στον τύπο της σειράς Taylor, δηλαδή $\epsilon = \Delta y - dy = \frac{f^{''}(\xi)(x_1 - x_0)^2}{2}$ ή διαφορετικά $\Delta y = dy + \frac{f^{''}(\xi)(x_1 - x_0)^2}{2}$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η $f(x)$ είναι μία αυστηρά κοίλη συνάρτηση (παντού) έτσι ώστε $f^{''}(x) < 0$ επειδή $(x_1 - x_0)^2$ είναι θετικό για οποιαδήποτε τιμή $x_1 \neq x_0$, το υπόλοιπο θα είναι αρνητικό και το dy θα είναι μία υπερεκτίμηση του Δy.

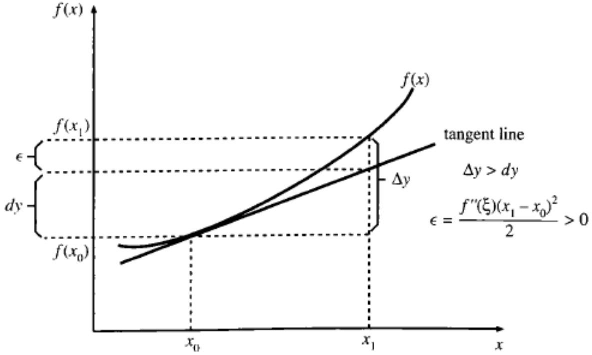
Αν υποθέσουμε ότι $f(x)$ είναι μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση (παντού) έτσι ώστε $f^{''}(x) > 0$, τότε το υπόλοιπο θα είναι θετικό και το ολικό διαφορικό dy θα είναι μία υποεκτίμηση του Δy.

Εφαρμογή στην προσέγγιση με σειρά Taylor



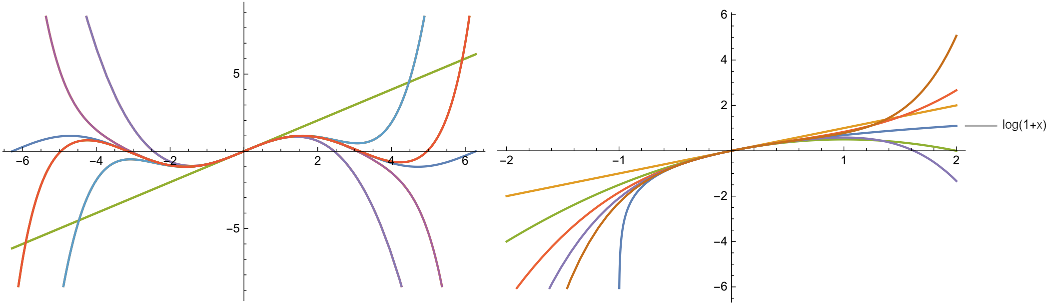
Σχήμα: Το ολικό διαφορικό υπερεκτιμά τη μεταβολή της τιμής μίας κοίλης συνάρτησης

Γεωμετρική ερμηνία προσέγγισης με σειρά Taylor



Σχήμα: Το ολικό διαφορικό υποεκτιμά τη μεταβολή της τιμής μίας κυρτής συνάρτησης

Γραφική απεικόνιση προσέγγισης με πολυώνυμα Taylor



Σχήμα: Πολυώνυμα Taylor για τις συναρτήσεις $\sin(x)$ και $\log(1+x)$ στο σημείο $x = 0$