Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 1

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Δημήτρης Χρήστου-Βαρασκέλης
Καθηγητής

Οκτώβριος 2023

Θέματα 1ης διάλεξης

- Συναρτήσεις, εικόνα συνάρτησης και αντίστροφη συνάρτηση
- ϵ-περιοχές
- Όρια-Συνέχεια συνάρτησης
- Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Μιγαδικοί αριθμοί

Εικόνα συνόλου μέσω συνάρτησης f

Ορισμός: Όταν έχουμε δύο σύνολα X και Y, η **συνάρτηση** (function) από το X στο Y είναι ένας κανόνας που συνδέει με κάθε στοιχείο του X, ένα και μόνο στοιχείο του Y.

- Το σύνολο X ονομάζεται σύνολο αφετηρίας ή **πεδίο ορισμού** (domain) της συνάρτησης, το Y ονομάζεται **σύνολο άφιξης** (codomain) και το σύνολο των στοιχείων του Y (που μπορεί να είναι ή και να μην είναι ολόκληρο το σύνολο Y) τα οποία συνδέονται με τα στοιχεία του X μέσω της συνάρτησης ονομάζεται **πεδίο τιμών** (range) της συνάρτησης.
- Χρησιμοποιώντας το σύμβολο f για τον κανόνα με τον οποίο συνδέονται τα στοιχεία των δύο συνόλων, μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f : X \to Y, \text{ με } y = f(x), x \in X$$

όπου το y συχνά ονομάζεται **εικόνα** (image) του x ή **τιμή** (value) της συνάρτησης f στο σημείο x.

Εικόνα συνόλου μέσω συνάρτησης f

- Το **πεδίο τιμών** ή **εικόνα** του X μίας συνάρτησης μπορεί να εμφανιστεί ως το **σύνολο των εικόνων** (image set):

$$f(X) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$$

- Αν $f(X) = Y$, λέμε ότι η f απεικονίζει το X επί του Y ή ότι η συνάρτηση f είναι **επί**.
- Μπορεί κάθε x να έχει ως εικόνα του ένα διαφορετικό στοιχείο του Y, οπότε η απεικόνιση λέμε ότι είναι *ένα προς ένα*. Για να αποδείξουμε εάν μια συνάρτηση είναι *ένα προς ένα* αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ή ισοδύναμα

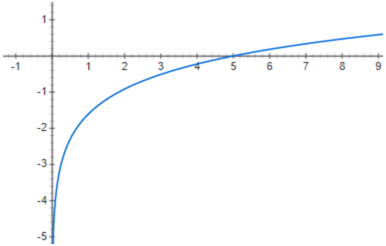
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Αντιστροφή συναρτήσεων

- Συχνά μπορεί να θέλουμε να αντιστρέψουμε τη συνάρτηση $y = f(x)$ και να εμφανίσουμε το x ως συνάρτηση του y, δηλαδή $x = f^{-1}(y)$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν η f **είναι ένα προς ένα**.
- Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ ή ισοδύναμα η f είναι ένα προς ένα, για ένα σύνολο $B \subset Y$ ορίζεται η **προεικόνα** του $A = f^{-1}(B)$.

Παράδειγμα προεικόνας συνόλου

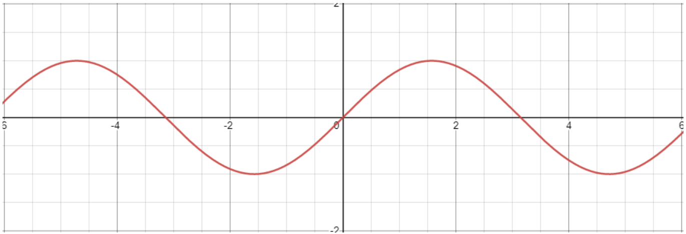
Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την προεικόνα του συνόλου $B = [1, 2]$ για τη συνάρτηση $f(x) = 5e^x$.
Αρχικά θα βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f:
$y = 5e^x \iff \frac{y}{5} = e^x \iff x = \ln(\frac{y}{5})$ ή $f^{-1}(x) = \ln(\frac{x}{5})$.
Εάν αντικαταστήσουμε τις ακραίες τιμές για το σύνολο B, αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι η προεικόνα του συνόλου είναι η
$A = \left[f^{-1}(1), f^{-1}(2)\right] = \left[\ln(\frac{1}{5}), \ln(\frac{2}{5})\right]$.



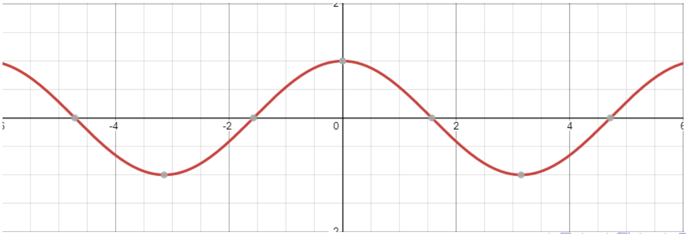
Σχήμα: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\ln\left(\frac{x}{5}\right)$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Ημίτονο ($\sin x$)

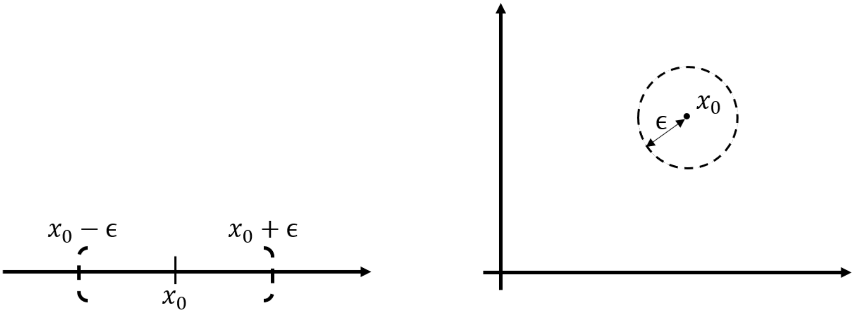


- Συνημίτονο ($\cos x$)



Περιοχή-ϵ

Η περιοχή-ϵ (ϵ-neighborhood) ενός σημείου $x_0 \in \mathbb{R}^n$ δίνεται από το σύνολο $N_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < \epsilon\}$. Πιο απλά το $N_\epsilon(x_0)$ είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται σε απόσταση ϵ από το x_0.



Σχήμα: Περιοχές-ϵ στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$

Ανοιχτό σύνολο

Ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι **ανοιχτό** (open) αν, για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα ϵ έτσι ώστε $N_\epsilon(x) \subset X$.

Όριο συνάρτησης

Ορισμός: Για $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I ανοικτό, $x_0 \in I$, $lim_{x \to x_0} = L \implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$.

- η f δε χρειάζεται να ορίζεται στο x_0.
- $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$
- $x \in N_\delta(x_0) \implies f(x) \in N_\epsilon(L)$

Όριο συνάρτησης-Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $lim_{x\to 2}(2x-1)=3$.
$|x-2|<\delta \implies |(2x-1)-3|<\epsilon \iff |2x-4|<\epsilon \iff |x-2|<\frac{\epsilon}{2}$
Επιλέγω $\delta=\frac{\epsilon}{2}$

Πλευρικά όρια

Έστω $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$.
$lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies |f(x) - L| < \epsilon$

Αντίστοιχα για $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Θεώρημα: $lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Πλευρικά όρια-Παράδειγμα (α)

Να δειχθεί ότι $lim_{x \to 1} f(x)$ δεν υπάρχει αν

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση:
α) $x \to 1^-$: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$1 - \delta < x < 1 \implies |-x^2 - (-1)| < \epsilon \iff |-x^2+1| < \epsilon \iff |1-x^2| < \epsilon \iff$ $|x-1||x+1| < \epsilon$.
$1 - \delta < x < 1 \implies -\delta < x - 1 < 0 \implies \delta > 1 - x > 0 \implies |1-x| = |x-1| < \delta$.
$1 - \delta < x < 1 \implies 2 - \delta < x + 1 < 2 \implies |x+1| < 2$ (για δ 'μικρό').
Άρα $|x-1||x+1| < 2\delta$, και επιλέγω $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.
Δείξαμε ότι $lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$.

Πλευρικά όρια-Παράδειγμα (β)

β) $x \to 1^+ : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 1 < x < 1 + \delta \implies |f(x) - 2| < \epsilon \iff |x + 1 - 2| < \epsilon.$
$1 < x < 1 + \delta \implies 0 < x - 1 < \delta \implies |x - 1| < \delta.$
Επιλέγω $\delta = \epsilon.$
$lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \neq lim_{x \to 1^-} f(x) \implies lim_{x \to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Άπειρα όρια

Ορισμός:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +(-)\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M (< -M)$.
Παράδειγμα: $lim_{x \to 0^-} = -\infty$ γιατί
$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : -\delta < x < 0 \implies f(x) = -M \iff \frac{1}{x} < -M$
$-\delta < x < 0 \iff -\frac{1}{\delta} > \frac{1}{x} = f(x)$.
Θέτω $\delta = \frac{1}{M}$, τότε $x \in (-\delta, 0) \implies f(x) < -\frac{1}{\delta} = -M$.

Όρια στο άπειρο

<u>Ορισμός</u>:
$lim_{x \to +(-)\infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists x_0 > 0 (< 0) : x > (<) x_0 \implies |f(x) - L| > \epsilon.$
<u>Ορισμός</u>:
$lim_{x \to \infty} f(x) = +(-)\infty \iff \forall M > 0, \exists x_0 > 0 : x > x_0 \implies f(x) > M(< -M).$
Παράδειγμα: $lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0.$
Θα δείξω ότι $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 > 0 : x > x_0 \implies |e^{-x} - 0| < \epsilon \iff e^{-x} < \epsilon \iff -x < ln(\epsilon) \iff x > -ln(\epsilon)$. Επιλέγω $x_0 > -ln(\epsilon)$, τότε
$x > x_0 = -ln(\epsilon) \implies |e^{-x} - 0| < \epsilon.$

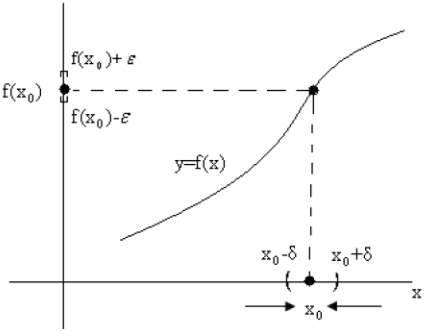
Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω $f, g, h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in I$ και $lim_{x \to x_0} = lim_{x \to x_0} h(x) = L$, τότε και $lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

Παράδειγμα: $-1 \leq sin(\frac{1}{x}) \leq 1$, για $x \neq 0$. Συνεπώς $-x \leq xsin(\frac{1}{x}) \leq x$ για $x > 0$ ή $-x \geq xsin(\frac{1}{x}) \geq x$ για $x < 0$. Άρα $-|x| \leq xsin(\frac{1}{x}) \leq |x|$. $lim_{x \to 0}(-|x|) = 0$ και $lim_{x \to 0}|x| = 0$. Συνεπώς $lim_{x \to 0} xsin(\frac{1}{x}) = 0$.

Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα στο οποίο ανήκει το σημείο $x = x_0$ είναι συνεχής σε αυτό το σημείο, αν για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, όποτε $|x - x_0| < \delta$.



Σχήμα: Συνέχεια συνάρτησης

Δύο βασικά θεωρήματα

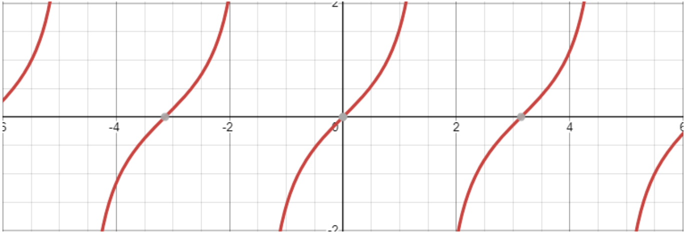
Θεώρημα 1: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\implies$ f φραγμένη στο $[a, b]$. Δηλαδή $\exists M > 0 : |f(x)| < M, \forall x \in [a, b]$.

Θεώρημα 2: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists x \in (a, b) : f(x) = 0$.

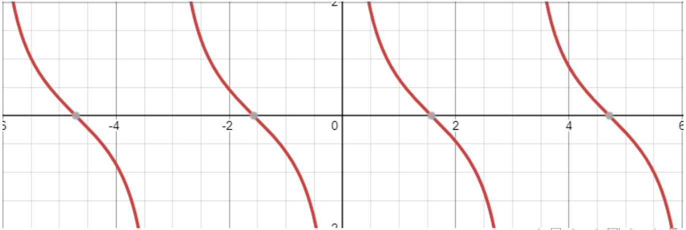
Παράδειγμα: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, στο $[-1, 1]$.
f συνεχής, $f(1) = 3$, $f(-1) = -9 \implies$ Η f έχει ρίζα στο $(-1, 1)$.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Εφαπτομένη ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

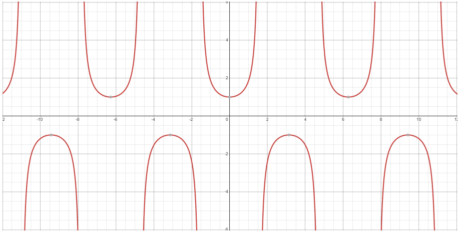


- Συνεφαπτομένη ($\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$)

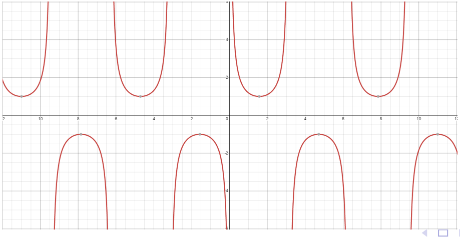


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Τέμνουσα ($\sec x = \frac{1}{\cos x}$)

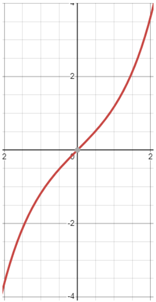


- Συντέμνουσα ($\csc x = \frac{1}{\sin x}$)

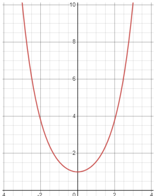


Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Τόξο ημιτόνου ($\arcsin x$)

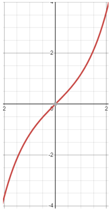


- Τόξο συνημιτόνου ($\arccos x$)

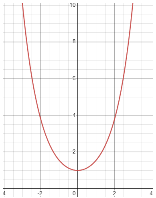


Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Υπερβολικό ημίτονο ($\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)



- Υπερβολικό συνημίτονο ($\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)



Ορισμός μιγαδικών αριθμών

Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να ορισθεί ώς ένα διατεταγμένο ζεύγος:

$$z = (x, y), \text{όπου } x, y \in \mathbb{R}$$

με τις πράξεις της πρόσθεσης:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

και πολλαπλασιασμού:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Οι πραγματικοί αριθμοί στην έκφραση $z = (x, y)$ είναι γνωστοί ως το *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος του z, και συμβολίζονται ως:

$$\text{Re}(z) = x, \ \text{Im}(z) = y$$

Συμβολισμός μιγαδικών αριθμών

Εάν συμβολίσουμε έναν πραγματικό άριθμό x ως $(x, 0)$ και τον φανταστικό αριθμό $(0, 1)$ με i, τότε ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως:

$$(x, y) = x + iy$$

Επιπλέον, βάσει των ορισμών, ισχύει:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

δηλαδή

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Βάσει αυτού του συμβολισμού, η πρόσθεση και πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών διαμορφώνονται ως:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Παράδειγμα - Δευτεροβάθμια εξίσωση

Για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 - x + 1 = 0$, παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι αρνητική:

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Δεν υπάρχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών υπάρχουν οι λύσεις:

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Αλγεβρικές ιδιότητες

- Αντιμεταθετική
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$$
- Προσεταιριστική
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$
- Επιμεριστική
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$
- Προσθετικό ταυτοτικό στοιχείο $0 = (0, 0)$ και πολλαπλασιαστική μονάδα $1 = (1, 0)$
$$z + 0 = z, z \cdot 1 = z$$
- Προσθετικό αντίστροφο στοιχείο $-z = (-x, -y)$
$$z + (-z) = 0$$
- Πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ για $z = x + iy \neq 0$
$$zz^{-1} = 1$$

Άσκηση

Εάν $z = x + iy \neq 0$, αποδείξτε ότι το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο του z είναι το $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Λύση

Για να βρούμε το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο του $z = x + iy$, θα πρέπει να αναζητήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς, έστω u και v έτσι ώστε:

$$(x + iy)(u + iv) = 1 + i0$$

Αναλύοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης, έχουμε:

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) = 1 + i0$$

Για να είναι οι δύο μιγαδικοί αριθμοί ίσοι, θα πρέπει τα πραγματικά και φανταστικά τους μέρη να είναι ίσα. Επομένως:

$$xu - yv = 1 \text{ και } xv + yu = 0$$

Εάν επιλύσουμε το γραμμικό αυτό σύστημα (άγνωστοι τα u, v) τότε παίρνουμε:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Διαίρεση μιγαδικών αριθμών

Η διαίρεση με έναν μη-μηδενικό μιγαδικό αριθμό ορίζεται ως:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}, z_2 \neq 0$$

ή (εάν $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

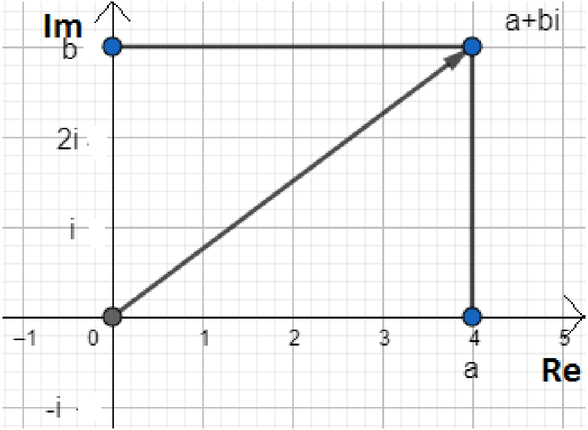
Άλλες ιδιότητες της διαίρεσης που μπορούν εύκολα να προκύψουν:

- $(z_1z_2)(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (z_1z_1^{-1})(z_2z_2^{-1}) = 1$, για $z_1, z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{z_1z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)$, για $z_1, z_2 \neq 0$
- $\frac{z_1+z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$, $\frac{z_1z_2}{z_3z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right)$, για $z_3, z_4 \neq 0$

Ισομορφισμός με το $\mathbb{R}^2$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.

Το $\mathbb{C}$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{I}$). Έτσι μπορούμε να κατάλαβουμε διαισθητικά καλύτερα το νοήμά του:



Σχήμα: Ισομορφισμός του $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Ως μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται η ποσότητα:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Γεωμετρικά, το μέτρο εκφράζει την απόσταση του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων. Εάν $y = 0$, τότε το μέτρο συμπίπτει με τη συνήθη απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών.

Τριγωνική ανισότητα:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Με βάση τον ισομορφισμό του $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$, μπορούμε να γράψουμε έναν μιγαδικό αριθμό με συντεταγμένες (a, b) σε "πολική" μορφή με συντεταγμένες (ρ, θ).

$$\theta = \arctan\left(b/a\right)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

όπου

$$a = \rho \cos(\theta)$$

και

$$b = \rho \sin(\theta)$$

και η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού z είναι:

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Συζυγείς Μιγαδικοί Αριθμοί

Αν έχουμε έναν μιγαδικό αριθμό z, ο αντίστοιχος μιγαδικός αριθμός ο οποίος έχει το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό μέρος ονομάζεται **συζυγής** του z και συμβολίζεται $\bar{z}$. Δηλαδή, αν $z = a + bi$ τότε $\bar{z} = a - bi$.

Ιδιότητες:

$z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.

$z - \bar{z} = 2bi = 2\mathrm{Im}(z)i$.

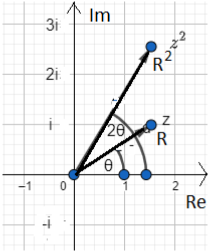
$z\bar{z} = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$.

Τύπος του Euler

Ο τύπος του Euler μας δίνει ότι:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

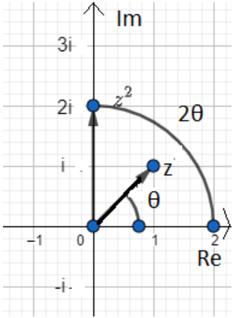
Αυτός ο τύπος μας δίνει τη δυνατότητα να υψώσουμε εύκολα έναν μιγαδικό αριθμό σε μία δύναμη.
Για παράδειγμα, αντί να υπολογίσουμε το $(a+bi)^n$ μετατρέπουμε τον αριθμό $a+bi$ σε πολική μορφή και υπολογίζουμε το $(Re^{i\theta})^n = R^n e^{in\theta} = R^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.



Σχήμα: Ο τύπος του Euler διαγραμματικά

Παράδειγμα για τον τύπο του Euler

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$. Μετατρέπουμε τον αριθμό σε πολική μορφή $R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Τότε, υψώνοντας στο τετράγωνο, υψώνουμε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού στο τετράγωνο και διπλασιάζεται η γωνία. Δηλαδή, έχουμε $z^2 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$.



Σχήμα: Ο τύπος του Euler για το δεδομένο παράδειγμα