Διακριτό πρόβλημα σακιδίου (Discrete Knapsack)

Input: $|X| = n \quad c_i, a_i, b$ integers

Output: $Y \subseteq X$ s.t. $\sum_{x_i \in Y} a_i \leq b$

and ***MAX profit***

Instance:

c: 10, 5, 8

a: 3, 2, 2

b=4, n=3

0-1 Knapsack

$$x_i \in \{1,0\}$$

$$Max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

Instance:

max 10 x_1 **+ 5** x_2 **+ 8** x_3

3 x_1 **+ 2** x_2 **+ 2** x_3 $\leq$ **4**

Greedy Knapsack (n, c, a, b)

${c_i}/{a_i}$ in non-increasing order

$$\frac{c_{j1}}{a_{j1}} \geq \frac{c_{j2}}{a_{j2}} \geq \ldots \geq \frac{c_{jn}}{a_{jn}}$$

$Y := \varnothing$

$for\ \ i := 1\ to\ n\ do$

$if\ \ b \geq a_i\ then$

$begin$

$Y := Y \cup \{x_i\}$

$b := b - a_i$

end

$return\ Y$

Dynamic Programming

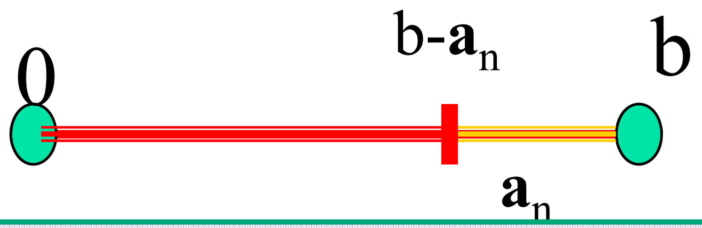
- Ορισμός υπο-προβλημάτων
- Σύνδεση βέλτιστων λύσεων (αναδρομική σχέση)
- Κατασκευή του πίνακα βέλτιστων λύσεων

Δυναμικός Προγραμματισμός/0-1 Knapsack

f_n (b): τιμή βέλτιστης λύσης με το πολύ n αντικείμενα

f_{n-1} (b): τιμή βέλτιστης λύσης με το πολύ n-1 αντικείμενα

$f_n(b) = f_{n-1}(b - \mathbf{a}_n) + \mathbf{c}_n$

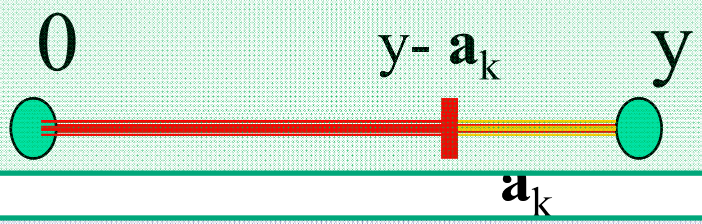


$$f_n(b) = \max\{f_{n-1}(b),\ f_{n-1}(b - \mathbf{a}_n) + \mathbf{c}_n\}$$

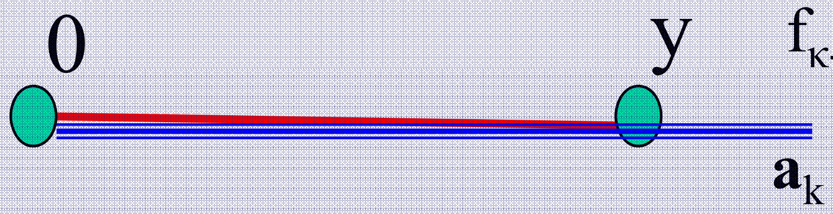
Δυναμικός Προγραμματισμός/0-1 Knapsack/ n x (b+1) υποπροβλήματα

$f_{\kappa}(y)$: τιμή βέλτιστης λύσης με το πολύ κ αντικείμενα

$f_{\kappa-1}(y)$: τιμή βέλτιστης λύσης με το πολύ κ-1 αντικείμενα



$$f_{\kappa}(y) = f_{\kappa-1}(y-\mathbf{a}_k) + \mathbf{c}_k$$



$f_{\kappa-1}(y)$

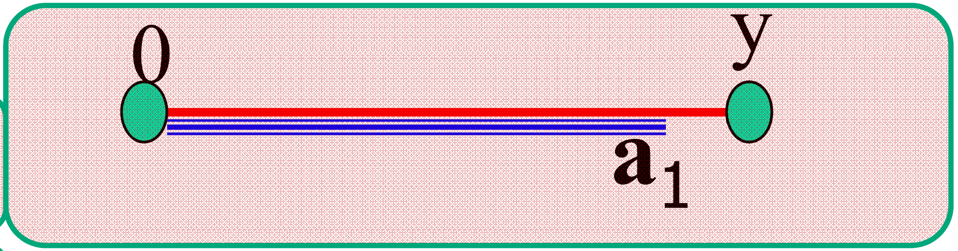
$$f_{\kappa}(y) = \max\left\{ f_{\kappa-1}(y),\ f_{\kappa-1}(y-\mathbf{a}_k) + \mathbf{c}_k \right\}$$

Δυναμικός Προγραμματισμός/0-1 Knapsack

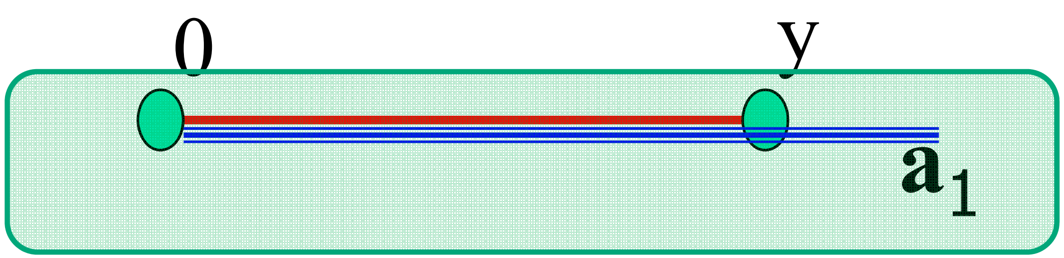
Αρχική συνθήκη

$f_1(y)$: τιμή βέλτιστης λύσης με ένα αντικείμενο

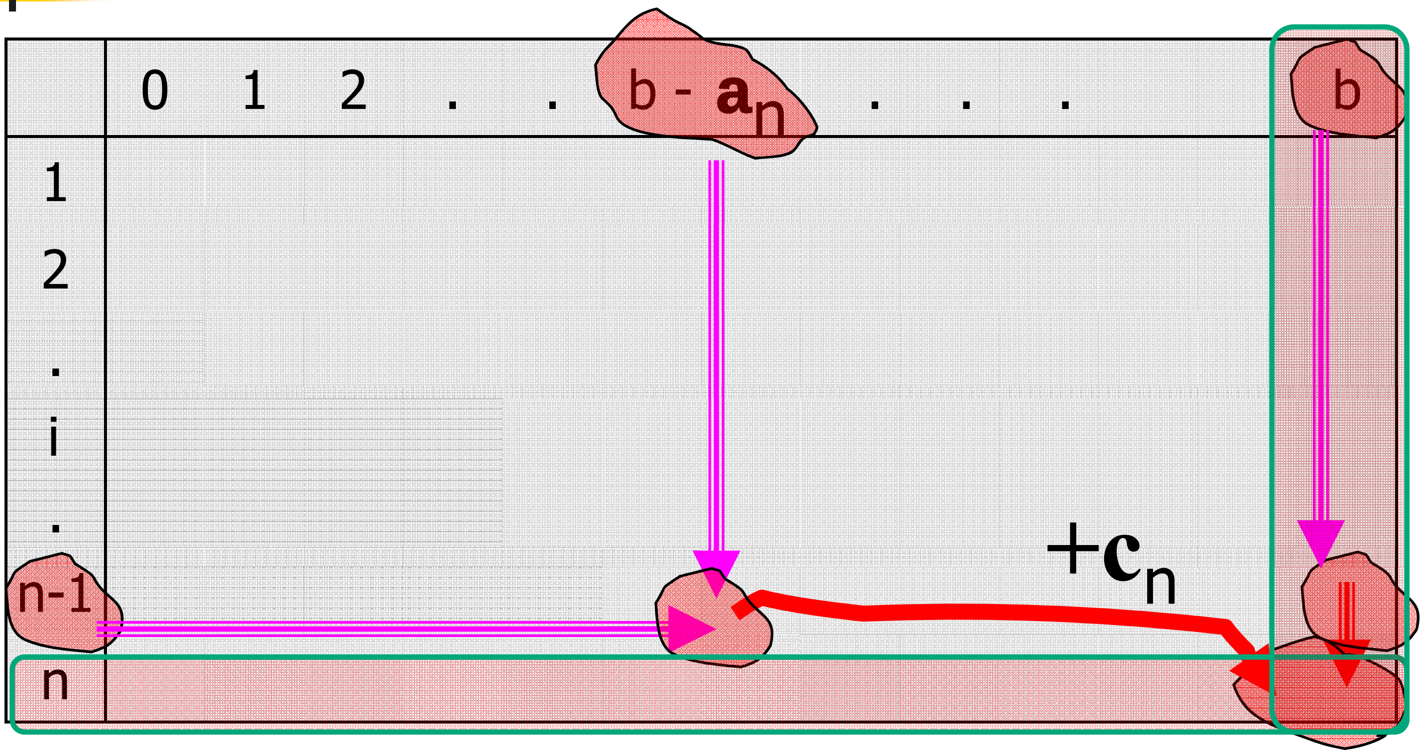
- $f_1(y) = \mathbf{c_1}$ **if** $\mathbf{a_1} \le y$



$f_1(y) = \mathbf{0}$ **if** $\mathbf{a_1} > y$



Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα) / υποπροβλήματα



f_n (b): τιμή βέλτιστης λύσης με το πολύ n αντικείμενα

f_{n-1} (b): τιμή βέλτιστης λύσης με το πολύ n-1 αντικείμενα

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq b \\
& x_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

$$f_k(y) = \max\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \leq y, \quad x_j \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,k\right\}$$

$$f_k(y) = \begin{cases} f_{k-1}(y) & \text{αν } y < \alpha_k \\ \max\{f_{k-1}(y), c_k + f_{k-1}(y-\alpha_k)\} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δυναμικός Προγραμματισμός

$$\begin{cases} 0 \le y \le b \\ \cancel{1}\,2 \le k \le n \\ f_k(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{βέλτιστη λύση} = f_n(b)$$

- εύρεση λύσης:

$$x_k(y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } f_k(y) = f_{k-1}(y) \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα) / εύρεση της τιμής / κατασκευή πίνακα

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**20**	**20**	**20**	**20**

Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα)/ εύρεση της τιμής

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \le 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**20**	**20**	**20**	**20**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16	20	20	20	20

+16

+16

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**20**	**20**	**20**	**20**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16	20	20	20	20
				+11		+11							
3	0	0	0	0	0	0	**11**	**11**	16	20	20	20	20

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9\mathrm{x}_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**20**	**20**	**20**	**20**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16	20	20	20	20
3	0	0	0	0	0	0	11	11	16	20	20	20	20
4	0	0	0	0	0	**9**	11	11	16	20	20	20	20

+9

+9

Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα) / εύρεση της τιμής

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \le 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**20**	**20**	**20**	**20**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16	20	20	20	20
3	0	0	0	0	0	0	11	11	16	20	20	20	20
4	0	0	0	0	0	9	11	11	16	20	20	20	20
								+7			+7		
5	0	0	0	0	7	9	11	11	16	20	20	20	**23**

Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα) / εύρεση της τιμής

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \le 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**20**	**20**	**20**	**20**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	**16**	20	20	20	20
3	0	0	0	0	0	0	**11**	**11**	16	20	20	20	20
4	0	0	0	0	0	**9**	11	11	16	20	20	20	20
5	0	0	0	0	**7**	**9**	11	11	16	20	20	20	**23**
6	0	**1**	**1**	**1**	7	9	11	**12**	16	20	**21**	**21**	23

initialization;

$f_1(y)$

for κ=2 to n do

for y=0 to b do

$$f_\kappa(y) = \max\left\{f_{\kappa-1}(y),\ f_{\kappa-1}(y - \mathbf{a}_k) + \mathbf{c}_k\right\}$$

Απομνημόνευσε αν το κ αντικείμενο επελέγη (στο πίνακα $x_\kappa(y)$ (1 αν ναι / 0 αν όχι))

endfor

endfor

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**1**
6	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	**1**	0	0	**1**	**1**	0

$x_6(12) = 0$

$x_5(12) = 1$

$x_4(8) = 0$

$x_2(8) = 1$

Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα)/εύρεση της δομής

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**1**
6	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	**1**	0	0	**1**	**1**	0

Δυναμικός Προγραμματισμός / αλγόριθμος σακιδίου/εύρεση δομής

```
k=n, y=b
while k>0 do
    if  xκ(y) = 1  then
        print (k)
        y=y - aκ
    endif
    k=k-1
endwhile
```

$y=y-a_2$ $y=y-a_5$ $y=b$

k-1

k=n

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**1**
6	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	**1**	0	0	**1**	**1**	0

Δυναμικός Προγραμματισμός / 0-1 knapsack

- Πολυπλοκότητα:
  - $O(nb)$ χρόνος
  - $O(b)$ μνήμη
  - (pseudo-polynomial)