

Κλάσματα

2.1. Η έννοια του κλάσματος

- Κατανόω την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού του "όλου" σε μέρη
- Κατανόω την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασία αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων.
- Υπολογίζω με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα την τιμή ενός μέρους από το όλο.
- Υπολογίζω την τιμή του όλου από την τιμή ενός μέρους του.

2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

- Κατανόω την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων.
- Απλοποιώ τα κλάσματα.
- Μετατρέπω κλάσματα σε ομώνυμα.
- Χρησιμοποιώ τη "χιαστί ιδιότητα" για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων:

$$\text{« Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \text{»}$$

2.3. Σύγκριση κλασμάτων

- Συγκρίνω κλάσματα.
- Λύνω σχετικά προβλήματα.

2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

- Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.
- Λύνω σχετικά προβλήματα.

2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.

- Πολλαπλασιάζω κλάσματα.
- Βρίσκω τον αντίστροφο ενός αριθμού.
- Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων, τις διατυπώνω με τη βοήθεια των συμβόλων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης.

2.6. Διάρθρωση κλασμάτων.

- Κάνω διάρθρωση κλασμάτων.



ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ Ο ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΣ
(287 - 212 π.Χ.)

20

Κ
Ε
Φ
Α
Λ
Α
Ι
Ο

A.2.1. Η έννοια του κλάσματος

Η λέξη "κλάσμα" φερόχεται από την αρχαία ελληνική λέξη "κλάω" ή "κλώ" που σημαίνει κόβω, τεμαχίζω κάτι. Το κλάσμα λοιπόν δηλώνει ότι έχουμε ένα κομμάτι, δηλαδή ένα μέρος κάποιου φράγματος. Στα Μαθηματικά θεωρούμε ότι αυτό που μοιράζεται, μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη. Έτσι, στα Μαθηματικά το "κλάσμα" φερέται να δηλώνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε το ολόκληρο (τον "όλον") και πόσα από αυτά πήραμε.

Κλάσμα: $\frac{\text{πόσα μέρη πήραμε}}{\text{σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε}}$: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$ (παρονομαστής όχι μηδέν)

Στη συνέχεια θα θυμηθούμε όσα ήδη έχουμε μάθει για τα κλάσματα και θα εφεκτείνουμε τις γνώσεις μας στις φεράξεις των κλασμάτων.

? ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Τρεις φίλοι αγοράζουν μια πίτσα και τη χωρίζουν σε οκτώ κομμάτια. Ο ένας έφαγε το ένα κομμάτι, ο δεύτερος τα τρία και ο τρίτος δύο κομμάτια.

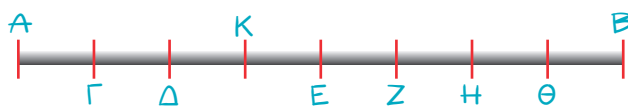
- > Μπορείς να βρεις το μέρος της πίτσας που έφαγε ο καθένας;
- > Τι μέρος της πίτσας περίσσεψε;



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα προσπάθησε:

- > Να βρεις ποιο μέρος του μήκους του τμήματος AB είναι το μήκος του τμήματος AK.
- > Να υπολογίσεις το μήκος του AK, αν γνωρίζουμε ότι το AB είναι 32 cm;
- > Να βρεις ζεύγη τμημάτων που το ένα να είναι: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ του άλλου.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

- > Προσπάθησε να μοιράσεις τρεις σοκολάτες (όπως αυτή του σχήματος) σε οκτώ παιδιά.



ΣΚΕΦΤΟΜΑΣΤΕ

Είναι προφανές ότι για να μοιραστούν οι τρεις σοκολάτες σε οκτώ παιδιά, πρέπει να γίνει διαίρεση $3:8$. Πρακτικά, για να γίνει το μοίρασμα αυτό, χρειάζεται πρώτα να χωριστεί μια σοκολάτα σε οκτώ (8) ίσα μέρη, ώστε κάθε



κομμάτι να είναι το $\frac{1}{8}$ της σοκολάτας. Επειδή έχουμε τρεις (3) σοκολάτες, τελικά, το κάθε παιδί θα

πάρει τα $\frac{3}{8}$ από τις τρεις σοκολάτες. Επομένως το κλάσμα $\frac{3}{8}$ και το πηλίκο $3:8$ εκφράζουν την ίδια

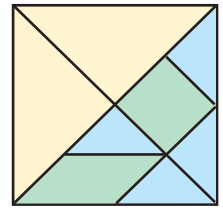
ποσότητα. Άρα μπορούμε να πούμε ότι το κλάσμα $\frac{3}{8}$ παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή

διά του παρονομαστή, δηλαδή: $\frac{3}{8} = 3:8$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Στο διπλανό σχήμα ένα τετράγωνο έχει χωριστεί, ανάλογα με το χρώμα, σε τριών ειδών μέρη.

- > Μπορείς να βρεις τι κλάσμα του τετραγώνου είναι το καθένα μέρος του;



Θνημόμαστε - Μαθαίνουμε



- Το σύμβολο $\frac{1}{v}$ (v φυσικός, $\neq 0$) που εκφράζει το ένα από τα v ίσα μέρη, στα οποία χωρίζεται μία ποσότητα, ονομάζεται **κλασματική μονάδα**.
- **Κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{k}{v}$ όπου k, v φυσικοί αριθμοί και $v \neq 0$.

Το κλάσμα $\frac{k}{v}$ εκφράζει τα k μέρη από τα v ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μία ποσότητα. Γενικά:

$$\frac{k}{v} = k \cdot \frac{1}{v}, \text{ όπου } k, v \text{ φυσικοί αριθμοί και } v \neq 0.$$

- ◆ Κάθε κλάσμα παριστάνει και το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή. Γενικά ισχύει $\frac{k}{v} = k : v$ όπου k, v φυσικοί αριθμοί και $v \neq 0$.
- ◆ Κάθε φυσικός αριθμός k μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, γιατί $k = k : 1 = \frac{k}{1}$.
- ◆ Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

αριθμητής → 2
κλασματική γραμμή → $\frac{2}{3}$ όροι του κλάσματος
παρονομαστής → 3

διαβάζεται "δύο τρίτα"

$$\frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{8} = 3 : 8$$

$$6 = \frac{6}{1}, \quad 15 = \frac{15}{1}, \quad 21 = \frac{21}{1}$$

Είναι $\frac{8}{3} > 1$ διότι $8 > 3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Το καμπαναριό μιας εκκλησίας έχει ύψος 20 m, ενώ η εκκλησία έχει ύψος τα $\frac{3}{5}$ του ύψους του καμπαναριού.

Ποιο είναι το ύψος της εκκλησίας;

Λύση

Όλο το ύψος του καμπαναριού, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$, είναι 20 m,

επομένως το $\frac{1}{5}$ αυτού θα είναι $\frac{1}{5} \cdot 20 \text{ cm} = \frac{20}{5} \text{ m} = 4 \text{ m}$.

Τότε τα $\frac{3}{5}$ θα είναι $3 \cdot 4 \text{ m} = 12 \text{ m}$. Άρα το ύψος της εκκλησίας θα είναι 12 m.



2. Μια δεξαμενή πετρελαίου σε μια πολυκατοικία, χωράει 2000 lt. Ο διαχειριστής σε μια μέτρηση βρήκε ότι ήταν γεμάτη κατά τα $\frac{3}{4}$. Πόσα λίτρα πετρέλαιο είχε η δεξαμενή;



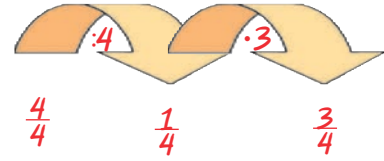
Λύση

Η δεξαμενή ολόκληρη είναι τα $\frac{4}{4}$ και χωράει 2000 lt.

Το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής θα χωράει

$$\frac{1}{4} \cdot 2000 \text{ lt} = \frac{2000}{4} \text{ lt} = 500 \text{ lt}.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα $\frac{3}{4}$ θα περιέχουν $3 \cdot 500 \text{ lt} = 1500 \text{ lt}$.



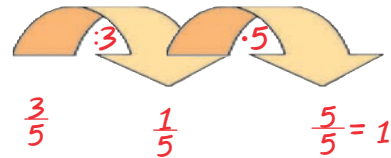
◆ Ο παραπάνω τρόπος λύσης ονομάζεται **αναγωγή στη μονάδα** και μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που είναι γνωστή η τιμή του όλου και ζητείται του μέρους. Άλλος τρόπος λύσης είναι ο πολλαπλασιασμός του αριθμού που εκφράζει το μέρος επί τον αριθμό που εκφράζει το όλον (π.χ. $\frac{3}{4} \cdot 2.000 \text{ lt} = 1.500 \text{ lt}$).

3. Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού ενός μπαχαρικού κοστίζουν 27 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{8}{9}$ του κιλού;

Λύση

Τα $\frac{3}{5}$ κοστίζουν 27 €. Άρα το $\frac{1}{5}$ κοστίζει $27 \text{ €} : 3 = 9 \text{ €}$.

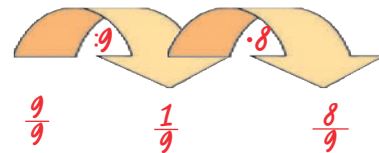
Τα $\frac{5}{5}$ κοστίζουν $5 \cdot 9 \text{ €} = 45 \text{ €}$.



◆ Για να βρούμε την τιμή του όλου ξεκινάμε από την τιμή του μέρους και υπολογίζουμε την τιμή της μονάδας (αναγωγή στη μονάδα).

Τα $\frac{9}{9}$ κοστίζουν 45€. Άρα το $\frac{1}{9}$ κοστίζει $\frac{45}{9} \text{ €} = 5 \text{ €}$.

Έτσι τα $\frac{8}{9}$ κοστίζουν $8 \cdot 5 \text{ €} = 40 \text{ €}$. Διότι είναι: $1 = \frac{5}{5} = \frac{9}{9} = \dots$

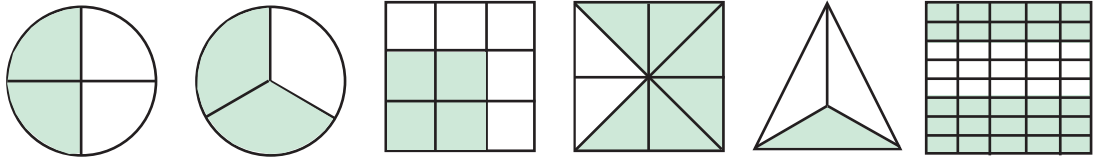


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



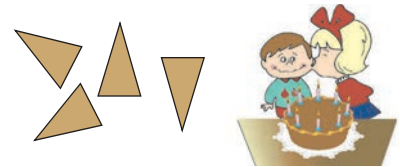
1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
 - (α) Στο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ οι αριθμοί κ και λ ονομάζονται
 - (β) Ισχύει ότι: (α) $\frac{a}{1} = \dots\dots\dots$ (β) $\frac{a}{a} = \dots\dots\dots$ (γ) $\frac{0}{a} = \dots\dots\dots$
 - (γ) Η φράση "το μέρος $\frac{\kappa}{\lambda}$ ενός μεγέθους Α" εκφράζει τον χωρισμό του μεγέθους Α σε
2. Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{18}{20}$ είναι όλα μικρότερα της μονάδας;
3. Τι κλάσμα των μαθητών της τάξης 28 μαθητών είναι οι 4 απόντες;
4. Αν το $\frac{1}{5}$ ενός κιλού καρύδια είναι 14 καρύδια, το κιλό περιέχει 70 καρύδια;

5. Τα παρακάτω σχήματα έχουν χωριστεί σε ίσα μέρη. Γράψε για το καθένα από αυτά, το κλάσμα που εκφράζει το χρωματισμένο μέρος του.



6. Από μία τούρτα περίσσεψαν τα κομμάτια που βλέπεις στο σχήμα τα οποία αποτελούν τα $\frac{2}{7}$ της τούρτας.

Πόσα ήταν αρχικά όλα τα κομμάτια της τούρτας;



7. Βρες ποιο μέρος του κιλού είναι τα: (α) 100, (β) 250, (γ) 500, (δ) 600 γραμμάρια.

8. Ποιο μέρος: (α) του μήνα, (β) του εξαμήνου, (γ) του έτους είναι οι 15 ημέρες;

9. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{2}{5}$ της αρχικής τιμής τους. Ένα φόρεμα κόστιζε 90 € πριν την έκπτωση. Υπολόγισε πόσα ευρώ έκπτωση έγινε στο φόρεμα και πόσο θα πληρώσουμε για να το αγοράσουμε.

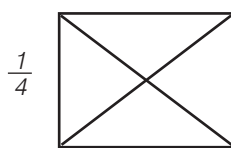
10. Σε μια τάξη τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών μαθαίνουν αγγλικά. Να βρεις πόσους μαθητές έχει η τάξη, αν γνωρίζεις ότι αυτοί που μαθαίνουν αγγλικά είναι 12 μαθητές.

11. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μια πλευρά του είναι 33 εκατοστά και η άλλη τα $\frac{3}{11}$ της πρώτης. Να βρεις την περίμετρο του ορθογωνίου.

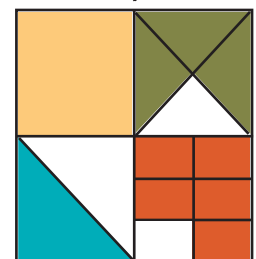
12. Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB έχει μήκος 5 εκατοστά. Να σχεδιάσεις: (α) ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με μήκος τα $\frac{8}{10}$ του AB και (β) ένα ευθύγραμμο τμήμα EZ με μήκος τα $\frac{6}{5}$ του AB.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Χρωμάτισε σε καθένα από τα σχήματα που ακολουθούν τα μέρη που αντιστοιχούν στα κλάσματα που είναι γραμμένα κάτω από κάθε σχήμα.



2. Να βρεις ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου είναι κάθε χρωματισμένο μέρος του διπλανού σχήματος.



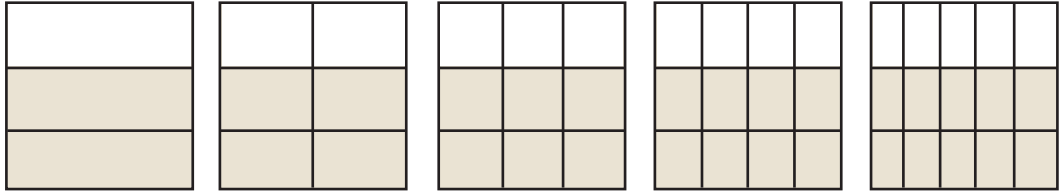
A.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Καθένα από τα παρακάτω πέντε ίσα τετράγωνα είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη με διαφορετικούς τρόπους.

- Προσπάθησε να βρεις για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του;
- Στη συνέχεια σύγκρινε τα κλάσματα, που θα βρεις μεταξύ τους.
- Τι παρατηρείς για τα κλάσματα που βρήκες;



Θνημόμαστε - Μαθαίνουμε



- Δύο κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{y}{\delta}$ λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε:

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{2}{3} \text{ και } \frac{10}{15} \text{ ισοδύναμα}$$

δηλαδή: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

- ▶ Αν δύο κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{y}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα “χιαστί γινόμενα” $a \cdot \delta$ και $b \cdot y$ είναι ίσα και αντιστρόφως.

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$$

τότε: $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$

Δηλαδή: αν $\frac{a}{b} = \frac{y}{\delta}$ τότε: $a \cdot \delta = b \cdot y$ και αντιστρόφως.

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

γιατί: $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

- ▶ Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.
- ▶ Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$$

- Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση του κλάσματος** και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.

- Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει άλλος κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή εκτός από τη μονάδα) λέγεται **ανάγωγο**.

$$\frac{7}{12} \text{ ανάγωγο}$$

αφού ΜΚΔ(7, 12)=1

$$\frac{2}{7}, \frac{5}{7} \text{ ομώνυμα}$$

- Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται **ετερώνυμα**.

$$\frac{2}{7}, \frac{5}{3} \text{ ετερώνυμα}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα: (α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{10}{14}$, (β) $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$ είναι ισοδύναμα.

Λύση

- (α) Υπολογίζουμε τα “χιαστί γινόμενα”, δηλαδή: $3 \cdot 14 = 42$ και $5 \cdot 10 = 50$
Τα γινόμενα δεν είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.
- (β) Υπολογίζουμε τα “χιαστί γινόμενα”: $3 \cdot 48 = 144$ και $8 \cdot 18 = 144$
Τα γινόμενα είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, δηλαδή: $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$

2. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{30}{66}$.

Λύση

Ο ΜΚΔ των όρων του κλάσματος 30 και 66 είναι: $\text{ΜΚΔ}(30, 66) = 6$

Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 6 και έχουμε: $\frac{30}{66} = \frac{30:6}{66:6} = \frac{5}{11}$

3. Να μετατραπούν σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{5}{20}$.

Λύση

- ◆ Πριν από κάθε μετατροπή ετερόνομων κλασμάτων σε ομώνυμα ελέγχουμε αν τα κλάσματα απλοποιούνται.

$\text{ΜΚΔ}(5, 20) = 5$
Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{5}{20}$ με το 5 και

έχουμε: $\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4}$

- ◆ Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων ετερονομών κλασμάτων.

$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ $\text{ΕΚΠ}(5, 3, 4) = 60$

- ◆ Διαιρούμε το ΕΚΠ με καθένα από τους παρονομαστές.

$$60 : 5 = 12$$

$$60 : 3 = 20$$

$$60 : 4 = 15$$

- ◆ Πολλαπλασιάζουμε τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκαμε.

$$\frac{\overset{12}{3}}{5} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{36}{60}$$

$$\frac{\overset{20}{2}}{3} = \frac{2 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{40}{60}$$

$$\frac{\overset{15}{1}}{4} = \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{15}{60}$$

Επομένως τα κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμα ομώνυμα:

$$\frac{36}{60}, \frac{40}{60} \text{ και } \frac{15}{60}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
- (α) Δύο κλάσματα λέγονται **ισοδύναμα**, όταν
 - (β) Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε οι όροι α, β, γ και δ **συνδέονται με τη σχέση**:
 - (γ) Ανάγωγο λέγεται το κλάσμα, το οποίο
 - (δ) Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν
 - (ε) Ετερόνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν
 - (στ) Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ΜΚΔ τους, το κλάσμα γίνεται



2. Να εξετάσεις ποια από τα κλάσματα είναι **ισοδύναμα**:
- (α) $\frac{2}{3}, \frac{18}{27}$, (β) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$, (γ) $\frac{7}{8}, \frac{30}{40}$, (δ) $\frac{13}{14}, \frac{26}{28}$.

3. Να μετατρέψεις καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε **ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό 100**: (α) $\frac{3}{4}$, (β) $\frac{8}{5}$, (γ) $\frac{4}{20}$, (δ) $\frac{5}{2}$, (ε) $\frac{60}{75}$.

4. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε **ισοδύναμα με παρονομαστή τον αριθμό 3**:
- (α) $\frac{10}{6}$, (β) $\frac{50}{30}$, (γ) $\frac{18}{27}$.

5. Να μετατρέψεις το κλάσμα $\frac{2}{3}$ σε **ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή**: (α) 6, και (β) 15.

6. Να συμπληρώσεις τα κενά, ώστε να προκύψουν **ισοδύναμα κλάσματα**:
- (α) $\frac{2}{3} = \frac{22}{\dots}$, (β) $\frac{\dots}{5} = \frac{9}{15}$, (γ) $\frac{14}{4} = \frac{\dots}{20}$, (δ) $\frac{48}{36} = \frac{\dots}{24}$.

7. Να απλοποιήσεις τα κλάσματα: (α) $\frac{25}{30}$, (β) $\frac{12}{9}$, (γ) $\frac{32}{56}$.

8. Να βρεις ποια από τα κλάσματα είναι **ανάγωγα**: (α) $\frac{32}{30}$, (β) $\frac{15}{14}$, (γ) $\frac{51}{16}$, (δ) $\frac{26}{50}$.

9. Να γίνουν **ομώνυμα** τα παρακάτω κλάσματα: (α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{9}$, (β) $\frac{7}{8}$ και $\frac{3}{10}$, (γ) $\frac{11}{3}$ και $\frac{7}{12}$.

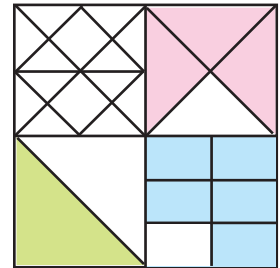
10. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.
- | | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|---|--------------------------|--------------------------|
| (α) Το κλάσμα $\frac{10}{25}$ απλοποιείται με το 5. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (β) Το κλάσμα $\frac{3}{5}$ είναι ανάγωγο. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (γ) Αν το κλάσμα $\frac{x}{8}$ μετατραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή 24 , ο αριθμητής του θα είναι διπλάσιος του x . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (δ) Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος επί 4 , το κλάσμα θα γίνει 4 φορές μεγαλύτερο . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (ε) Το κλάσμα $\frac{18}{522}$ απλοποιείται με το 6. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (στ) Ένα ανάγωγο κλάσμα είναι πάντα μικρότερο του 1 . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (ζ) $\frac{0}{4} = \frac{0}{10}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (η) $\frac{23}{30} = \frac{20 + 3}{20 + 10} = \frac{3}{10}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (θ) $\frac{3}{11} = \frac{60}{220}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (ι) $\frac{5}{5} = \frac{41}{41}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (ια) Το κλάσμα $\frac{\alpha + \beta}{1}$ είναι πάντα ίσο με α + β . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

A.2.3. Σύγκριση κλασμάτων



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου καταλαμβάνει κάθε χρώμα, στο διπλανό σχήμα; Η Μαρία είπε πως το ροζ χρώμα καταλαμβάνει τα $\frac{9}{48}$, το γαλάζιο τα $\frac{10}{48}$ και το πράσινο τα $\frac{7}{48}$.
Ενώ ο Γιάννης είπε ότι το ροζ είναι τα $\frac{3}{16}$, το γαλάζιο τα $\frac{5}{24}$ και το πράσινο το $\frac{1}{8}$ του τετραγώνου.



- > Ποιος έχει δίκιο και ποιος όχι;
- > Προσπάθησε να γράψεις σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα που αντιστοιχούν σε καθένα από τα μέρη του τετραγώνου.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται πώς κατανέμονται οι ώρες ενός 24ώρου από έναν μαθητή, της Α' Γυμνασίου.



- > Τι μέρος του χρόνου του είναι κάθε δραστηριότητα;
- > Πόσο χρόνο διαρκεί κάθε δραστηριότητα;
- > Σε ποια δραστηριότητα δαπανά τον περισσότερο χρόνο;
- > Γράψε σε μια σειρά τους χρόνους που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο και καταλήγοντας στον μικρότερο χρόνο.



Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι το 24ωρο είναι χωρισμένο σε 12 κομμάτια, από τα οποία τα 4 αντιστοιχούν στον ύπνο, τα 3 στο σχολικό ωράριο, τα 2 στο διάβασμα, το 1 στον αθλητισμό και τα 2 στο παιχνίδι. Επομένως, το μέρος που αφιερώνεται για ύπνο είναι τα $\frac{4}{12}$ του συνολικού χρόνου, για

το σχολείο τα $\frac{3}{12}$, για το διάβασμα τα $\frac{2}{12}$, για τον αθλητισμό το $\frac{1}{12}$ και για το παιχνίδι τα $\frac{2}{12}$

Επειδή κάθε κομμάτι αντιστοιχεί σε δύο ώρες, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος που αφιερώνεται για κάθε δραστηριότητα είναι: 8 ώρες για ύπνο, 6 ώρες για το σχολείο, 4 ώρες για διάβασμα, 2 ώρες για αθλητισμό και 4 ώρες για παιχνίδι.

Άρα, η ζητούμενη χρονική σειρά των διαφόρων δραστηριοτήτων είναι:

8 ώρες (Ύπνος) > 6 ώρες (Σχολείο) > 4 ώρες (Διάβασμα) = 4 ώρες (Παιχνίδι) > 2 ώρες (Αθλητισμός).

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:



▶ Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

▶ Για να συγκρίνουμε ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

▶ Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

$$\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$$

Για να συγκρίνω τα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$

τα μετατρέπω σε ομώνυμα:

$$\frac{7}{12} = \frac{28}{48} \text{ και } \frac{5}{16} = \frac{15}{48} \text{ Άρα: } \frac{7}{12} > \frac{5}{16}$$

$$\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

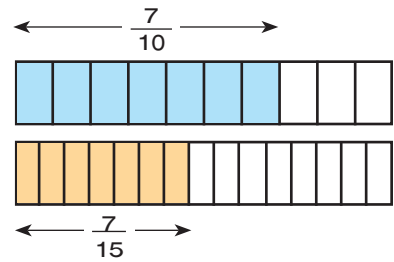
1. Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{7}{10}$ και $\frac{7}{15}$.



Λύση

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι “σε όσα περισσότερα μέρη χωρίζεται ένα συγκεκριμένο μέγεθος, τόσο μικρότερα είναι τα μέρη αυτά”.

Δηλαδή: $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$ και $\frac{7}{15} < \frac{7}{10}$.



2. Να συγκριθούν τα κλάσματα: $\frac{5}{8}$ και $\frac{4}{9}$.

Λύση

Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. ΕΚΠ(8, 9)=72, επομένως

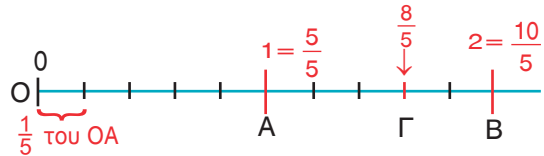
$72 : 8 = 9$ και $72 : 9 = 8$ οπότε $\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$ και $\frac{4}{9} = \frac{32}{72}$. Άρα $\frac{5}{8} > \frac{4}{9}$.

3. Να τοποθετηθεί στην ευθεία των αριθμών το κλάσμα $\frac{8}{5}$.

Λύση

Για το κλάσμα $\frac{8}{5}$ έχουμε ότι:

$$1 = \frac{5}{5} < \frac{8}{5} < \frac{10}{5} = 2$$



Καθένα, από τα τμήματα ΟΑ και ΑΒ του σχήματος είναι ίσο με τη μονάδα.

Τα χωρίζουμε σε 5 ίσα τμήματα, ώστε το καθένα να είναι ίσο με το $\frac{1}{5}$ της μονάδας.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ αποτελείται από 8 ίσα τμήματα ίσα με το $\frac{1}{5}$ της μονάδας το καθένα.

Το μήκος ΟΓ είναι $\frac{8}{5}$ του ΟΑ. Άρα το κλάσμα $\frac{8}{5}$ τοποθετείται στο σημείο Γ.

4. Να βρεθεί ένα κλάσμα μεγαλύτερο από το $\frac{2}{5}$ και μικρότερο από τα $\frac{3}{5}$.

Λύση

Τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$ είναι ομώνυμα και ανάμεσα στους αριθμητές του 2 και 3 δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός. Μπορούμε, όμως, να βρούμε ισοδύναμα κλάσματα με αυτά π.χ. τα $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, για τα οποία μεταξύ των αριθμητών τους 4 και 6 υπάρχει ο αριθμός 5.

Επομένως, αφού το κλάσμα $\frac{5}{10}$ είναι μεταξύ των $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, θα είναι και $\frac{2}{5} < \frac{5}{10} < \frac{3}{5}$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
 (α) Ένα κλάσμα είναι:
 (i) ίσο με 1, αν ο αριθμητής του είναι τον παρονομαστή.
 (ii) μικρότερο του 1, αν ο αριθμητής του είναι τον παρονομαστή.
 (iii) μεγαλύτερο του 1, αν ο αριθμητής του είναι τον παρονομαστή.
 (β) Αν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ τότε

2. Σύγκρινε τα κλάσματα: (α) $\frac{3}{7}$ και $\frac{5}{7}$, (β) $\frac{3}{5}$ και $\frac{3}{9}$, (γ) $\frac{4}{5}$ και $\frac{8}{12}$.

3. Γράψε τα κλάσματα $\frac{31}{10}$, $\frac{31}{14}$, $\frac{31}{11}$, $\frac{31}{13}$, $\frac{31}{12}$ σε φθίνουσα σειρά.

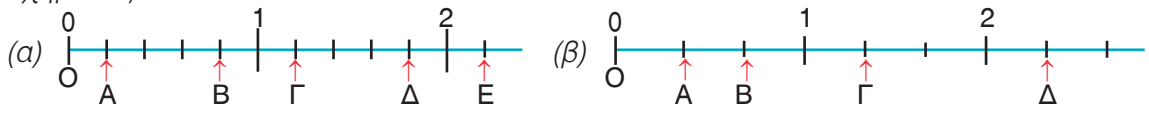
4. Σύγκρινε με το 1 τα κλάσματα: (α) $\frac{5}{8}$, (β) $\frac{9}{10}$, (γ) $\frac{12}{11}$, (δ) $\frac{16}{16}$, (ε) $\frac{109}{120}$.

5. Βάλε σε σειρά τα κλάσματα: $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{7}{5}$.

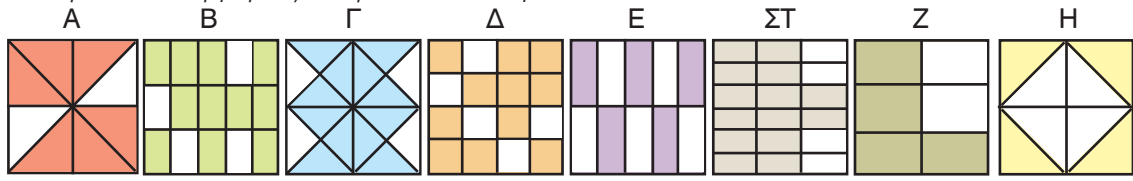
6. Βρες μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται καθένα από τα παρακάτω κλάσματα (α) $\frac{5}{3}$, (β) $\frac{7}{2}$, (γ) $\frac{8}{9}$, (δ) $\frac{63}{5}$, (ε) $\frac{125}{10}$.

7. Τοποθέτησε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα:
 (α) $\frac{1}{2}$, (β) $\frac{3}{2}$, (γ) $\frac{5}{2}$, (δ) $\frac{1}{4}$, (ε) $\frac{3}{4}$, (στ) $\frac{4}{5}$, (ζ) $\frac{9}{10}$.

8. Ποιοι κλασματικοί αριθμοί πρέπει να τοποθετηθούν στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του σχήματος:



9. Συμπλήρωσε τις κενές θέσεις του πίνακα με το κλάσμα που αντιστοιχεί στο χρωματισμένο τμήμα του τετραγώνου με το αντίστοιχο γράμμα και μετά βάλε τα κλάσματα που βρήκες σε φθίνουσα σειρά.



A	B	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Z	H

Α.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Το συνεργείο του Δήμου φύτεψε σε μια μέρα τα $\frac{4}{12}$ μιας πλατείας με λουλούδια. Την επόμενη ημέρα που ο καιρός δεν ήταν καλός φύτεψε μόνο τα $\frac{3}{12}$ της πλατείας.



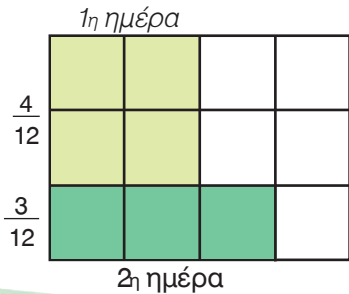
➤ Ποιο τμήμα της πλατείας είχε φυτέψει, συνολικά, στο τέλος της δεύτερης ημέρας;



Σκεφτόμαστε

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι στο τέλος της δεύτερης ημέρας έχουν φυτευτεί, συνολικά, τα $\frac{7}{12}$ της πλατείας.

Πράγμα που σημαίνει ότι το άθροισμα $\frac{4}{12} + \frac{3}{12}$ κάνει $\frac{7}{12}$.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ένα φορτηγό κάλυψε σε μία ώρα τα $\frac{2}{5}$ της διαδρομής Πάτρα - Τρίπολη.

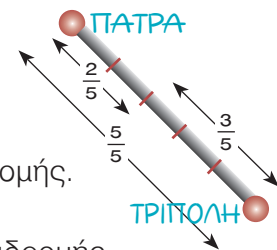
➤ Ποιο μέρος της διαδρομής του μένει να καλύψει ακόμη;



Σκεφτόμαστε

Όπως φαίνεται στο σχήμα δεν έχουν καλυφθεί τα $\frac{3}{5}$ της διαδρομής.

Επομένως, η διαφορά $\frac{5}{5} - \frac{2}{5}$ κάνει τα $\frac{3}{5}$ του συνόλου της διαδρομής.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Μια βρύση γεμίζει, σε 1 ώρα, τα $\frac{2}{5}$ της δεξαμενής. Μια άλλη

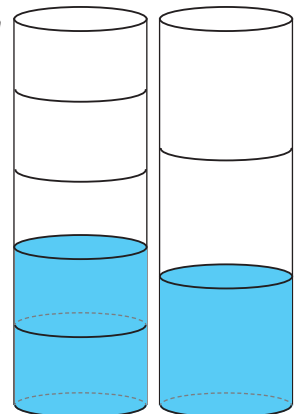
βρύση γεμίζει το $\frac{1}{3}$ της ίδιας δεξαμενής, επίσης σε 1 ώρα.

Αν και οι δύο βρύσες τρέχουν ταυτόχρονα μέσα στη δεξαμενή, τι μέρος της δεξαμενής θα γεμίσουν σε 1 ώρα;



Σκεφτόμαστε

Αν οι βρύσες "τρέχουν" ταυτόχρονα στη δεξαμενή για 1 ώρα θα έχουν γεμίσει ένα τμήμα της που αντιστοιχεί στο άθροισμα των τμημάτων αυτής που η κάθε μία γεμίζει ξεχωριστά. Δηλαδή το ...



Θνημόμαστε - Μαθαίνουμε



Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

➤ Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή.

$$\frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a+\beta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7+2}{5} = \frac{9}{5}$$

- ▶ Προσθέτουμε ετερόνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα. $\frac{7}{4} + \frac{2}{3} = \frac{21}{12} + \frac{8}{12} = \frac{29}{12}$
- ▶ Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή. $\frac{a}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a-\beta}{\gamma}$ $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$
- ▶ Αφαιρούμε δύο ετερόνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα. $\frac{7}{4} - \frac{2}{3} = \frac{21}{12} - \frac{8}{12} = \frac{13}{12}$
- ▶ Ισχύουν όλες οι ιδιότητες της πρόσθεσης των φυσικών στα κλάσματα.
- ◆ Μερικές φορές αντί να γράφουμε $1 + \frac{4}{5}$, γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$.
- Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός φυσικού με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 3$.

Λύση

Μετατρέπουμε τον φυσικό αριθμό σε κλάσμα με παρονομαστή 4.

$$\text{Είναι: } \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 3 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3 \cdot 4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{12}{4} = \frac{15}{4}.$$

2. Να αποδειχθεί ότι: (α) $\frac{a+\beta}{\beta} = \frac{a}{\beta} + 1$ και (β) $\frac{a-\beta}{\beta} = \frac{a}{\beta} - 1$.

Λύση

$$(α) \frac{a+\beta}{\beta} = \frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} = \frac{a}{\beta} + 1 \quad (β) \frac{a-\beta}{\beta} = \frac{a}{\beta} - \frac{\beta}{\beta} = \frac{a}{\beta} - 1$$

3. Να υπολογισθεί η διαφορά και το άθροισμα των κλασμάτων $\frac{5}{12}$ και $\frac{7}{20}$.

Λύση

Τα κλάσματα είναι ετερόνυμα και πρέπει πρώτα να μετατραπούν σε ισοδύναμα ομώνυμα. Έχουμε: $\text{ΕΚΠ}(12, 20) = 60$ οπότε: $60 : 12 = 5$ και $60 : 20 = 3$

Άρα: $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}$ και $\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{21}{60}$. Επειδή $\frac{25}{60} > \frac{21}{60}$ μπορεί να υπολογιστεί

$$\text{η διαφορά: } \frac{5}{12} - \frac{7}{20} = \frac{25}{60} - \frac{21}{60} = \frac{4}{60} = \frac{4:4}{60:4} = \frac{1}{15}$$

$$\text{και } \frac{5}{12} + \frac{7}{20} = \frac{25}{60} + \frac{21}{60} = \frac{46}{60} = \frac{46:2}{60:2} = \frac{23}{30}$$

4. Να βρεθεί η διαφορά: $\frac{15}{4} - 1$ και το αποτέλεσμα να γίνει μεικτός.

Λύση

$\frac{15}{4} - 1 = \frac{15}{4} - \frac{4}{4} = \frac{15-4}{4} = \frac{11}{4}$. Για να τρέψουμε το αποτέλεσμα σε μεικτό αριθμό εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση: $11 = 4 \cdot 2 + 3$ και έχουμε:

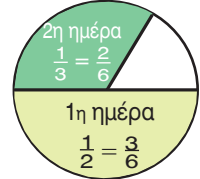
$$\frac{11}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 2 \cdot 1 + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

5. Να βρεθεί το άθροισμα: $2 + 1\frac{1}{3}$.

Λύση

$$2 + 1\frac{1}{3} = 2 + 1 + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9 + 1}{3} = \frac{10}{3}$$

6. Την πρώτη ημέρα ένας κηπουρός κούρεψε το γκαζόν στο $\frac{1}{2}$ μιας στρογγυλής πλατείας. Τη δεύτερη ημέρα, εξαιτίας μιας δυνατής βροχής, κατάφερε να κουρέψει μόνο το $\frac{1}{3}$ του αρχικού γκαζόν. Ποιο μέρος από το γκαζόν της πλατείας κουρεύτηκε μέχρι και το τέλος της δεύτερης ημέρας;



Λύση

Για να βρούμε ποιο μέρος της πλατείας που κουρεύτηκε, στο τέλος της δεύτερης ημέρας, δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{3}$. Αλλά, για να εκτελέσουμε αυτή την πρόσθεση πρέπει να μετατρέψουμε τα δύο κλάσματα σε ομώνυμα. Άρα, θα έχουμε: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Για να βρούμε ποιο κλάσμα της πλατείας έχει απομείνει για κούρεμα, πρέπει να αφαιρέσουμε από το όλο μέρος, δηλαδή: $\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{5}{3} + \frac{2}{3}$, (β) $\frac{11}{13} + \frac{2}{13}$, (γ) $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}$, (δ) $\frac{8}{12} + \frac{2}{3}$, (ε) $\frac{17}{20} + \frac{3}{15}$, (στ) $\frac{15}{12} + \frac{5}{4}$, και απλοποίησε το τελικό αποτέλεσμα, αν δεν είναι ανάγωγο κλάσμα.
- Να βρεις τις διαφορές και να απλοποιήσεις το αποτέλεσμα, όπου αυτό δεν είναι ανάγωγο κλάσμα: (α) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$, (β) $\frac{8}{9} - \frac{3}{9}$, (γ) $\frac{10}{8} - \frac{3}{4}$, (δ) $\frac{4}{9} - \frac{2}{27}$, (ε) $\frac{7}{3} - \frac{5}{8}$, (στ) $\frac{3}{7} - \frac{3}{11}$.
- Να μετατρέψεις τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα: (α) $3\frac{5}{8}$, (β) $4\frac{1}{10}$, (γ) $2\frac{1}{9}$.
- Κάνε τα ακόλουθα κλάσματα μεικτούς αριθμούς: (α) $\frac{15}{4}$, (β) $\frac{5}{2}$, (γ) $\frac{38}{12}$.
- Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{3}{8} + 2$, (β) $\frac{12}{15} + 1$, (γ) $\frac{16}{20} + \frac{3}{10} + 5$.
- Να βρεις τις διαφορές: (α) $3 - 2\frac{1}{5}$, (β) $4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}$, (γ) $1\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$.
- Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{3}{8}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{5}{9}$;
- Ένας αγρότης πούλησε σε τέσσερις εμπόρους τα $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{10}$ της παραγωγής του. Ποιο μέρος της παραγωγής του έμεινε απούλητο;

9. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(β) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{12}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(γ) $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(δ) $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(ε) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(στ) $\frac{3+5}{5} = \frac{3}{5} + 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(ζ) $\frac{8-3}{8} = 1 - \frac{3}{8}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Αντιστοίχισε σε κάθε πρόσθεση το σωστό αποτέλεσμα:

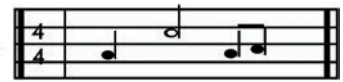


$\frac{8}{10} + \frac{4}{10}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{9} + \frac{4}{9}$	2
$\frac{45}{90} + \frac{15}{90}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{16}{12} + \frac{8}{12}$	$\frac{5}{5}$

2. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

+	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{5}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{3}{2}$				
1				
$\frac{3}{5}$				

ΝΟΤΕΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ



Ανάμεσα στα κοινά στοιχεία όλων των ανθρωπίνων πολιτισμών είναι η δυνατότητα αρίθμησης και μουσικής έκφρασης.

- Ο άνθρωπος δημιουργεί μουσική, ήδη, από τους προϊστορικούς χρόνους, αφού το αρχαιότερο σχετικό εύρημα, που έχει ηλικία 35.000 χρόνων, είναι οστά από μαμούθ τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή ρυθμικών ήχων.
- Οι μελέτες έχουν δείξει, ότι η έννοια του αριθμού εμφανίζεται στον άνθρωπο από τα πρώτα του βήματα. Διαπιστώθηκε ότι αυτή η πρώιμη ικανότητα αρίθμησης σχετίζεται με την ικανότητα της κατάτμησης του χρόνου, που δημιουργεί η αντιστοιχία γεγονότων και χρονικών στιγμών και μάλιστα χωρίς τη χρήση της έννοιας του αριθμού.

Εξάλλου η αρίθμηση είναι μια πολιτιστική αναγκαιότητα, ένα καθολικό στοιχείο πολιτισμού.

Η συνάντηση της Μουσικής με τα Μαθηματικά πραγματοποιείται μέσα από την αίσθηση, που έχουμε για τον χρόνο και εντοπίζεται σε δύο βασικούς άξονες κάθε μουσικής έκφρασης, τον Ρυθμό και την Αρμονία. Ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να εντοπίζει και να απομονώνει τις χρονικές στιγμές. Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο στιγμών, δημιουργεί την αίσθηση της διάρκειας. Ο χωρισμός του χρόνου από τα γεγονότα δημιουργεί ένα πυκνό σύνολο από στιγμές. Έτσι, ο ρυθμός και ο αριθμός έχουν κοινή καταγωγή, τον χωρισμό του χρόνου σε στιγμές και την αντιστοίχιση των χρονικών στιγμών με γεγονότα. Ο ρυθμός είναι από τις πρώτες μουσικές ανθρώπινες κατακτήσεις, όπως ακριβώς ο αριθμός είναι από τις πρώτες θεμελιώδεις Μαθηματικές ανθρώπινες επινοήσεις. Ο ρυθμός, λοιπόν, είναι το πρώτο είδος μουσικής που δημιούργησε ο άνθρωπος. Το μουσικό μέτρο, το οποίο είναι απαραίτητο για την εκτέλεση ενός μουσικού θέματος, δηλώνεται με ένα κλάσμα που καθορίζει τον ρυθμό. Σήμερα οι δύο αυτές έννοιες, του ρυθμού και του αριθμού-κλάσματος, συνυπάρχουν στον τρόπο με τον οποίο γράφεται η Δυτική Μουσική. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Στο σχήμα φαίνεται ένα μέρος ενός μουσικού κομματιού. Η χρονική αξία του πρώτου και δεύτερου συμβόλου είναι $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, ενώ κάθε ένα από τα σύμβολα (νότες), που είναι ενωμένα έχουν εξ ορισμού αξία $\frac{1}{8}$. Το κλάσμα $\frac{4}{4}$ στην αρχή καθορίζει πως κάθε μέτρο, κάθε διάστημα δηλαδή, το οποίο περιέχει μια μουσική φράση, πρέπει να περιέχει σύμβολα (νότες) συνολικής αξίας $\frac{4}{4}$. Πράγματι $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{4}$. Με αυτό τον τρόπο ο αριθμός-κλάσμα καθορίζει τον ρυθμό και επιτρέπει να εκτελείται ένα μουσικό κομμάτι συγχρονισμένα από τους μουσικούς.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- Βρες παρτιτούρες από τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και γράψε τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς των τραγουδιών αυτών.
- Αναζήτησε και βρες ορισμένα χαρακτηριστικά τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και προσπάθησε να συσχετίσεις τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς αυτούς, με την ονομασία του εκάστοτε συγκεκριμένου ρυθμού.



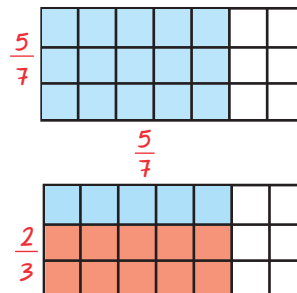
Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας πεζοδρόμος στρώθηκε με πλάκες. Τα $\frac{5}{7}$ από τις πλάκες είναι χρωματιστές. Από τις χρωματιστές τα $\frac{2}{3}$ είναι κόκκινες.

➤ Ποιο είναι το μέρος όλου του πεζοδρομού που καταλαμβάνουν οι κόκκινες πλάκες;



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο κανόνα:



➤ Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$$

➤ Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda \cdot \frac{a}{\beta} = \frac{\lambda \cdot a}{\beta} = \frac{a \cdot \lambda}{\beta}$$

$$7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5}$$

● Δύο κλάσματα λέγονται **αντίστροφα** όταν έχουν γινόμενο 1.

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = 1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι αντίστροφα.

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{35}{35} = 1$$

➤ Ισχύουν όλες οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών στα κλάσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το γινόμενο: $\frac{3}{7} \cdot \frac{70}{6} \cdot \frac{8}{5}$.

Λύση

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{70}{6} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3 \cdot 70 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 560}{7 \cdot 30} = \frac{1680}{210} = 8$$

Μπορεί να βρεθεί το γινόμενο με πιο απλό τρόπο;

2. Σε ένα σχολείο με 252 μαθητές, τα $\frac{5}{9}$ είναι αγόρια. Να βρεις πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το σχολείο.

Λύση

Αφού τα αγόρια είναι τα $\frac{5}{9}$ των μαθητών, θα είναι: $\frac{5}{9} \cdot 252 = \frac{5 \cdot 252}{9} = \frac{1260}{9} = 140$.

Επομένως, τα κορίτσια θα είναι: $252 - 140 = 112$.





ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
 - (α) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα
 -
 - (β) Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν
 - (γ) Ο αντίστροφος του αριθμού κ είναι ο, του $\frac{1}{\kappa}$ είναι ο και του $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ο
 - (δ) Μόνο ο αριθμός ισούται με τον αντίστροφό του.

2. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $3 \cdot \frac{3}{4}$, (β) $7 \cdot \frac{10}{14}$, (γ) $\frac{4}{2} \cdot 2$, (δ) $\frac{5}{100} \cdot 10$.

3. Βρες τα γινόμενα: (α) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8}$, (β) $\frac{8}{10} \cdot \frac{100}{5}$, (γ) $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9}$, (δ) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15}$.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

•	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{5}$				
$\frac{2}{3}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

5. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{21}$, (β) $4\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$, (γ) $3\frac{1}{8} \cdot 10$, (δ) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

6. Να βρεις τους αντίστροφους των αριθμών: (α) $\frac{4}{7}$, (β) 72, (γ) $\frac{5}{8}$, (δ) $\frac{1}{3}$, (ε) $\frac{739}{8}$, (στ) 1.

7. Ο Κώστας ήπια τα $\frac{2}{3}$ από ένα μπουκάλι, που περιείχε αναψυκτικό όγκου $1\frac{1}{2}$ του λίτρου. Πόσα λίτρα αναψυκτικού ήπια;

8. Υπολόγισε τα εξαγόμενα των πράξεων: (α) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$, (β) $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$, (γ) $\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$.

9. Όμοια: (α) $\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$, (β) $\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$, (γ) $\frac{7}{3} - \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{8}$.

A.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

Θημόμαστε - Μαθαίνουμε



▶ Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

$$5 : 4 = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

▶ Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$$

Μετατροπή σύνθετον σε απλό

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$$

- Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται σύνθετο κλάσμα.

διότι $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{15}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα: (α) $\frac{2}{\frac{3}{10}}$, (β) $\frac{4}{\frac{9}{8}}$, (γ) $\frac{7}{\frac{10}{5}}$.

Λύση

$$(α) \frac{2}{\frac{3}{10}} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3}{5}, \quad (β) \frac{4}{\frac{9}{8}} = \frac{4}{1} = \frac{4 \cdot 8}{1 \cdot 8} = \frac{32}{8} = 3 \frac{5}{8}, \quad (γ) \frac{7}{\frac{10}{5}} = \frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 1}{10 \cdot 5} = \frac{7}{50}$$

2. Να εκτελεστούν οι πράξεις: $\frac{\frac{3}{10} + \frac{1}{2}}{\frac{4}{3} - \frac{4}{6}}$.

Λύση

$$\frac{\frac{3}{10} + \frac{1}{2}}{\frac{4}{3} - \frac{4}{6}} = \frac{\frac{3}{10} + \frac{5}{10}}{\frac{8}{6} - \frac{4}{6}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{4}{6}} = \frac{8 \cdot 6}{4 \cdot 10} = \frac{48}{40} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα

.....

(β) Σύνθετο κλάσμα λέγεται το κλάσμα, του οποίου

.....
2. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, (β) $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$, (γ) $\frac{10}{100} : \frac{1}{5}$, (δ) $\frac{7}{3} : \frac{21}{27}$.
3. Να βρεις τα πηλίκα: (α) $2 : \frac{1}{3}$, (β) $\frac{5}{8} : 1$, (γ) $2\frac{1}{2} : 4$, (δ) $4\frac{1}{10} : 3\frac{1}{3}$.
4. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, (β) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, (γ) $\frac{20}{6} : 10$, (δ) $10 : \frac{20}{6}$.
Τι παρατηρείς;
5. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{1}{8} : (\frac{1}{3} : \frac{1}{2})$ και (β) $(\frac{1}{8} : \frac{1}{3}) : \frac{1}{2}$. Τι παρατηρείς;
6. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

÷	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{1}{2}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

7. Αντιστοίχισε σε κάθε διαίρεση το σωστό αποτέλεσμα:

$\frac{3}{10} : \frac{4}{10}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$	6
$\frac{45}{90} : \frac{15}{9}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{16}{3} : \frac{8}{9}$	$\frac{3}{10}$

8. Να μετατρέψεις τα σύνθετα κλάσματα σε απλά: (α) $\frac{3}{4}\frac{8}{5}$, (β) $\frac{15}{3}\frac{4}{10}$, (γ) $\frac{20}{5}\frac{5}{4}$.
9. Κάνε τις πράξεις και απλοποίησε τα κλάσματα:

(α) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$, $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{8}$, $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$.
 $\frac{2}{3} + \frac{4}{6}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}$, $\frac{1}{8} : 2$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



Στον πάπυρο του Ριντ, βρήκαμε πως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν τα $\frac{2}{3}$ ενός οποιουδήποτε κλάσματος με αριθμητή το 1 και παρονομαστή έναν περιττό αριθμό.

Για παράδειγμα, τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{7}$ θα είναι: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.

- Εφάρμοσε τον παραπάνω κανόνα για τα κλάσματα $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$ και επαλήθευσε τα αποτελέσματα.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



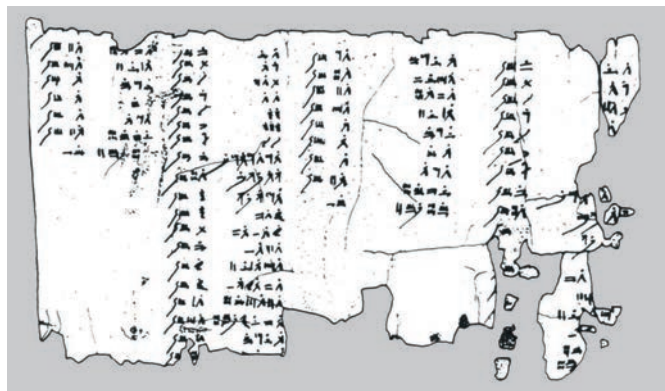
Σε αρχαία βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα που χρονολογούνται από το 2100 π.Χ. περίπου, συναντάμε εξηκονταδικά κλάσματα με παρονομαστή δύναμη του 60, για τα οποία υπήρχαν ειδικά σφηνοειδή σύμβολα.

Οι Βαβυλώνιοι είχαν επίσης ειδικά σύμβολα για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.

Οι Αιγύπτιοι, επίσης, γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τα λεγόμενα θεμελιώδη ή αιγυπτιακά κλάσματα, δηλαδή κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα (κλασματικές μονάδες στη δική μας ορολογία). Ένα θεμελιώδες κλάσμα συμβολίζεται με τον παρονομαστή του, πάνω στον οποίο υπάρχει ένα διακριτικό σημείο, π.χ. το $\frac{1}{5}$ γράφεται ως $\bar{5}$.

Όμως είχαν ειδικό συμβολισμό για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.

Αυτή η ιδιομορφία του συμβολισμού οφείλεται στη διαφορετική προέλευση των κλασμάτων αυτών. Τα κλάσματα αυτά έλκουν την καταγωγή τους από άμεσα πρακτικά προβλήματα, ενώ τα θεμελιώδη κλάσματα πρέπει να ήταν προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας. Όλα τα κλάσματα που χρησιμοποιούν ανάγονται σε αθροίσματα θεμελιωδών κλασμάτων. Η αναγωγή αυτή γινόταν με τη βοήθεια ειδικών πινάκων. Ένας τέτοιος πίνακας υπάρχει στον πάπυρο του Ριντ (Rhind), μαθηματικό έργο των Αιγυπτίων, που τοποθετείται τουλάχιστον το 1650 π.Χ.



Ο πίνακας περιέχει την ανάλυση όλων των κλασμάτων της μορφής $\frac{2}{v}$ με "v" περιττό αριθμό από 5 έως 101.

$$v=5 \quad \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \bar{3} + \bar{15}$$

$$v=7 \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \bar{4} + \bar{28}$$

$$v=9 \quad \frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \bar{6} + \bar{18}$$

$$v=59 \quad \frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531} = \bar{36} + \bar{236} + \bar{531}$$

$$v=97 \quad \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} = \bar{56} + \bar{679} + \bar{776}$$

Αλλά και στον **πάπυρο της Μόσχας**, που τοποθετείται στα 1850 π.Χ., υπάρχουν προβλήματα που περιέχουν κλάσματα και πράξεις με κλάσματα και αριθμούς, όπως για παράδειγμα “το $\frac{1}{3}$ του 6 είναι 2”, που αναφέρεται σε υπολογισμό του όγκου δεδομένης κολουρης πυραμίδας.

Οι Έλληνες μαθηματικοί δεν ανέπτυξαν κάποιο νέο σύστημα γραφής των κλασμάτων. Χρησιμοποιούσαν τα θεμελιώδη κλάσματα των Αιγυπτίων και τα εξηκονταδικά των Βαβυλωνίων, σε υπολογιστικά προβλήματα στα μαθηματικά και την αστρονομία. Στους “άβακες” των Ρωμαίων και των Ελλήνων (τα γνωστά αριθμητάρια των πρώτων χρόνων του δημοτικού), βρίσκουμε ειδική στήλη για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$.

Οι **Ινδοί** μαθηματικοί, επίσης, γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα και τις πράξεις τους από πολύ παλιά. Στα έργα “Σουλβασούτρα”, μερικά από τα οποία ανάγονται στο 500 π.Χ. ή και παλαιότερα, χρησιμοποιούνται τα θεμελιώδη κλάσματα στον προσεγγιστικό υπολογισμό όγκων ή εμβαδών. Αλλά, όταν δημιούργησαν το δεκαδικό Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης, άρχισαν να χρησιμοποιούν και κλάσματα με μορφή πολύ κοντινή στη δική μας. Έγραφαν τον αριθμητή πάνω από τον παρονομαστή, αλλά, χωρίς την κλασματική γραμμή, για παράδειγμα $\frac{5}{6}$ αντί $\frac{5}{6}$. Τα κλάσματα ξεχώριζαν το ένα από το άλλο με οριζόντιες και κάθετες γραμμές.

Έτσι, π.χ. το κλάσμα $\frac{3}{5}$ γραφόταν $\left| \begin{array}{c} \overline{3} \\ \underline{5} \end{array} \right|$.

Η πρόσθεση συμβολιζόταν με την παράθεση των κλασμάτων το ένα δίπλα στο άλλο.

Για την **αφαίρεση** χρησιμοποιούσαν μία τελεία ή το σύμβολο “+” στα δεξιά,

π.χ. η έκφραση $\frac{9}{12} - \frac{2}{15} - \frac{1}{5}$ γραφόταν: $\left| \begin{array}{c} \overline{9} \\ \underline{12} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overline{2} \\ \underline{15} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overline{1+} \\ \underline{5} \end{array} \right|$.

Στα μεικτά κλάσματα π.χ. $3\frac{1}{4}$, το ακέραιο μέρος γραφόταν πάνω από το κλάσμα: $\left| \begin{array}{c} \overline{3} \\ \underline{1} \\ \underline{4} \end{array} \right|$.

Τα κλάσματα στους **Κινέζους** εμφανίστηκαν σχεδόν μαζί με τους ακέραιους αριθμούς. Τα πρώτα κλάσματα, που χρησιμοποιούσαν, ήταν το $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.

Στους κανόνες των αριθμητικών πράξεων στους Κινέζους, σε αντίθεση με τους άλλους λαούς, δεν υπήρχε τίποτα το ασυνήθιστο. Ήδη τον 2ο αιώνα π.Χ. οι Κινέζοι είχαν επεξεργαστεί, επαρκώς, όλες τις πράξεις με κλάσματα. Τον 3ο αιώνα μ.Χ. οι Κινέζοι, που χρησιμοποιούσαν, ήδη, το δεκαδικό σύστημα, άρχισαν στην ουσία, να χρησιμοποιούν δεκαδικά κλάσματα με μετρολογική μορφή.

Τα δεκαδικά κλάσματα εισάγονται στο έργο του Πέρση μαθηματικού Αλ-Κασί, ο οποίος εργαζόταν στο Αστεροσκοπείο της Σαμαρκάνδης. Αν και στο παρελθόν, υπήρξαν προσπάθειες στον Αραβικό κόσμο να εισαχθούν τα δεκαδικά κλάσματα, πρώτος ο Αλ-Κασί διατυπώνει τους βασικούς κανόνες των πράξεων και τους τρόπους μετατροπής των εξηκονταδικών κλασμάτων σε δεκαδικά και αντίστροφα.

Η είσοδος των κλασμάτων στα Ευρωπαϊκά μαθηματικά ανάγεται στον Λεονάρδο της Πίζας (1202), ενώ οι όροι “αριθμητής” και “παρονομαστής” απαντώνται στον Πλανούδη (τέλη 13ου αιώνα).

Ανακεφαλαίωση

ΚΛΑΣΜΑΤΑ $\frac{\kappa}{\nu}$, όπου κ και ν φυσικοί αριθμοί, $\nu \neq 0$

Ίσα ή Ισοδύναμα: αν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Ισχύει: $\frac{a}{\beta} = \frac{a \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma}$ και $\frac{a}{\beta} = \frac{a : \delta}{\beta : \delta}$

$\frac{a}{\beta}$ **ανάγωγο** όταν $\text{ΜΚΔ}(a, \beta) = 1$

ομώνυμα $\frac{a}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}$ **ετερόνυμα** $\frac{a}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$

$\frac{a}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$ όταν $a > \gamma$

και $\frac{\beta}{a} < \frac{\beta}{\gamma}$ όταν $a > \gamma$

Ο Μικτός αποτελείται από έναν ακέραιο και ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας.

$\frac{a}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ είναι **αντίστροφα** όταν $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = 1$

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} \text{ τότε: } 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \text{ και } \frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$$

$\frac{7}{12}$ **ανάγωγο** αφού $\text{ΜΚΔ}(7, 12) = 1$

ομώνυμα $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ **ετερόνυμα** $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}$

$\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$ αφού $9 > 5$

$\frac{7}{12} = \frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16} = \frac{15}{48}$. Επειδή $\frac{28}{48} > \frac{15}{48}$, άρα $\frac{7}{12} > \frac{5}{16}$

$\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$ αφού $9 > 5$

$$1 \frac{4}{5} = 1 + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{7 \cdot 10}{5 \cdot 14} = \frac{70}{70} = 1$$

Πράξεις μεταξύ κλασμάτων

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$$\frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a + \beta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7+2}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } \frac{7}{4} + \frac{2}{3} = \frac{21}{12} + \frac{8}{12} = \frac{29}{12}$$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

$$\frac{a}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a - \beta}{\gamma}$$

$$\frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6-2}{5} = \frac{4}{5} \text{ και } \frac{7}{4} - \frac{2}{3} = \frac{21}{12} - \frac{8}{12} = \frac{13}{12}$$

ΠΟΛΥΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \text{ και}$$

$$\lambda \cdot \frac{a}{\beta} = \frac{\lambda \cdot a}{\beta}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28} \text{ και } 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5}$$



ΔΙΑΙΡΕΣΗ

$$a : \beta = a \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{a}{\beta} \text{ και}$$

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

$$5 : 4 = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ και } \frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΕ ΑΠΛΟ

$$\frac{a}{\beta} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$$