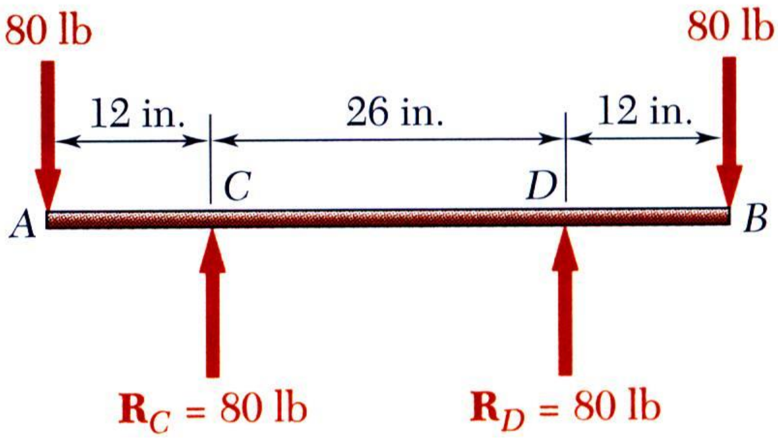
ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

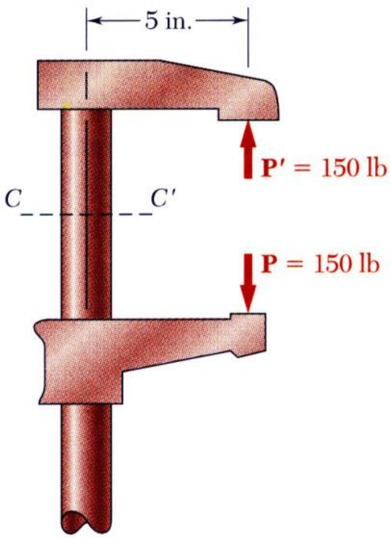
Καθαρή κάμψη

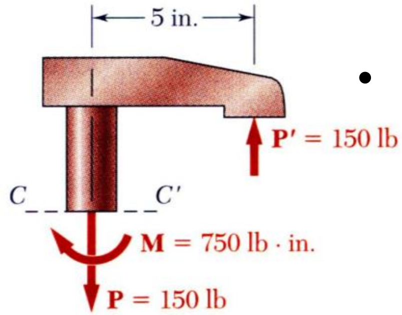
Καθαρή κάμψη



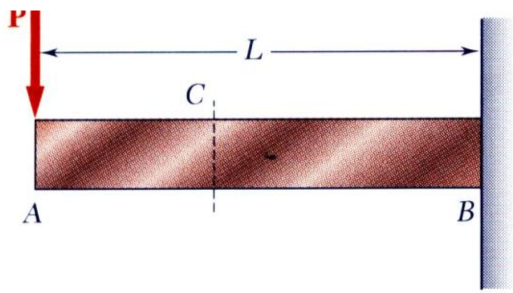
Καθαρή κάμψη: Πρισματικά μέλη υπόκεινται σε ίσα και αντίθετα ζεύγη (φορτίων ή ροπών) που δρουν στο ίδιο διαμήκες επίπεδο.

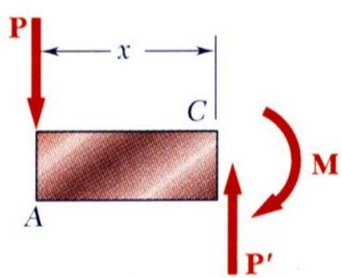
Άλλα είδη φορτίσεων





1 lb = 4.4 N



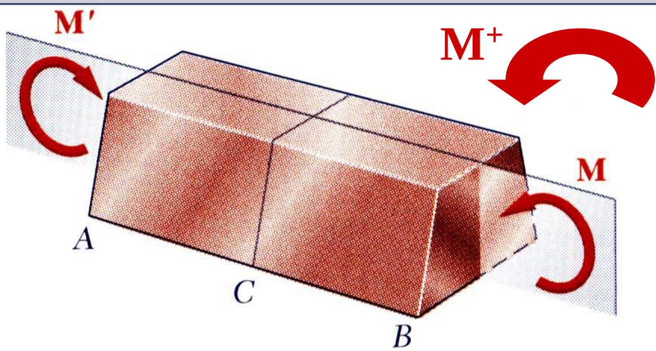


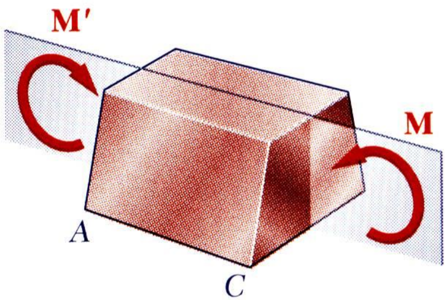
- *Έκκεντρη φόρτιση*: αξονική φόρτιση που δεν περνά από το κεντροειδές της διατομής και προκαλεί εσωτερικές δυνάμεις ισοδύναμες με μια αξονική εφελκυστική δύναμη και ροπή (ζεύγος).

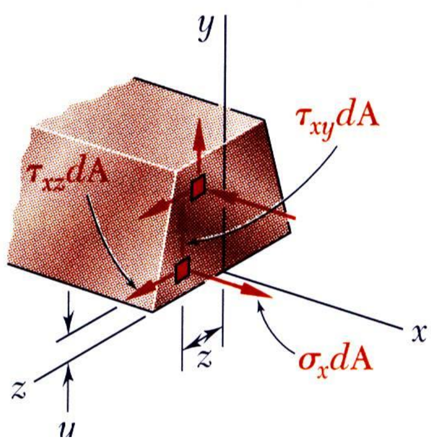
- *Εγκάρσια φόρτιση*: συγκεντρωμένο ή κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο προκαλεί εσωτερικές δυνάμεις που είναι ίσες με διατμητική δύναμη και μια ροπή (ζεύγος).

- *Αρχή της επαλληλίας*: Η ορθή τάση εξαιτίας της καθαρής κάμψης μπορεί να συνδυαστεί με (α) την ορθή τάση λόγω της αξονικής φόρτισης και (β) διατμητική τάση λόγω της διατμητικής φόρτισης προκειμένου να υπολογιστεί η πραγματική εντατική του κατάσταση.

Συμμετρικό μέλος σε καθαρή κάμψη







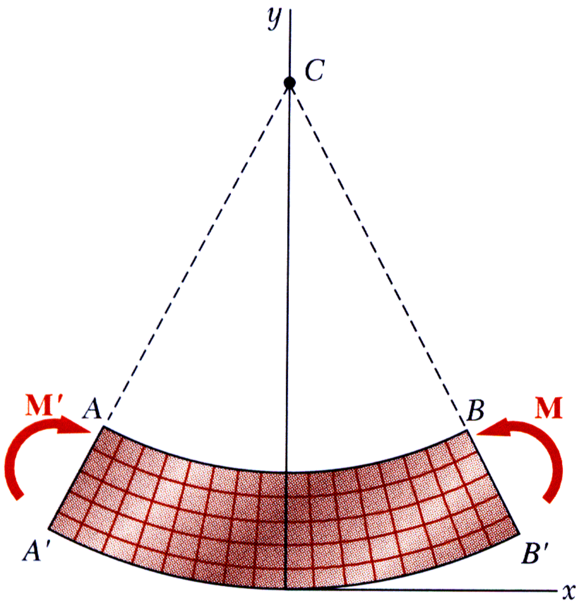
- Οι εσωτερικές δυνάμεις σε οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή είναι ισοδύναμες με ένα ζεύγος. Η ροπή *M* αυτού του ζεύγους αναφέρεται ως *ροπή κάμψης* ή *καμπτική ροπή*.
- Από την Στατική, ένα ζεύγος *M* αποτελείται από δυο ίσες και αντίθετες δυνάμεις.
- Το άθροισμα των συνιστωσών των δυνάμεων αυτών σε οποιαδήποτε διεύθυνση ισούται με μηδέν.
- Η ροπή του ζεύγους είναι η ίδια ως προς οποιονδήποτε άξονα κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους της και είναι μηδέν ως προς οποιονδήποτε άξονα που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο αυτό.
- Οι απαιτήσεις αυτές είναι δυνατόν να εφαρμοστούν στα αθροίσματα των συνιστωσών και ροπών των στατικά απροσδιόριστων στοιχειωδών εσωτερικών δυνάμεων.

$$F_x = \int \sigma_x \, dA = 0$$

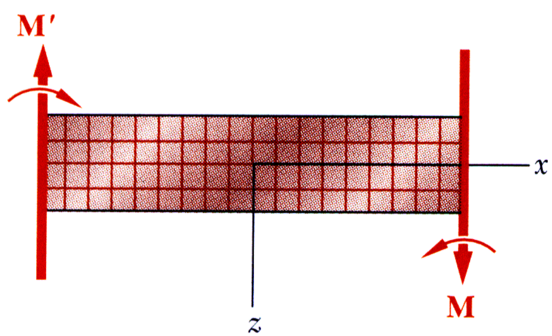
$$M_y = \int z\sigma_x \, dA = 0$$

$$M_z = \int -y\sigma_x \, dA = M$$

Καθαρή κάμψη: γενικά



(α) Διαμήκης, κατακόρυφη διατομή (επίπεδο συμμετρίας)

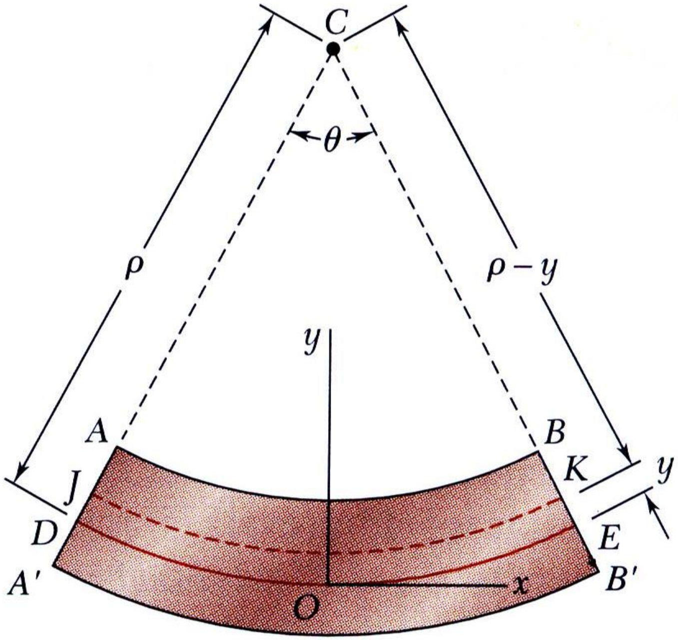


(β) Διαμήκης, οριζόντια διατομή

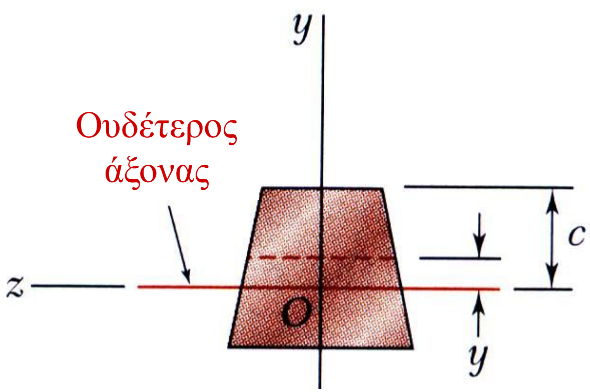
Συμμετρική δοκός σε καθαρή κάμψη:

- το μέλος παραμένει συμμετρικό
- κάμπτεται ομοιόμορφα ώστε να σχηματίσει ένα κυκλικό τόξο
- οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή η οποία είναι κάθετη στον άξονα του μέλους παραμένει επίπεδη
- το μήκος της άνω επιφάνειας μικραίνει και το μήκος της κάτω επιφάνειας μεγαλώνει
- πρέπει να υπάρχει μια *ουδέτερη επιφάνεια* που είναι παράλληλη με την άνω και κάτω επιφάνεια του μέλους και για την οποία το μήκος της δεν αλλάζει.
- οι τάσεις και παραμορφώσεις είναι αρνητικές (*θλιπτικές*) άνω της ουδέτερης επιφάνειας και θετικές (*εφελκυστικές*) κάτω της.

Παραμόρφωση λόγω κάμψης



(α) Διαμήκης, κατακόρυφη διατομή (επίπεδο συμμετρίας)



(β) Εγκάρσια διατομή

Έστω ένα τμήμα μιας δοκού μήκους L.

Μετά την παραμόρφωση, το μήκος της ουδέτερης επιφάνειας παραμένει L. Στις άλλες διατομές, ισχύει:

$$\text{τελικό μήκος } JK : L' = (\rho - y)\theta$$

$$\text{μεταβολή } JK : \delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

$$\text{αξονική παραμόρφωση } JK : \varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

(η παραμόρφωση μεταβάλλεται γραμμικά)

Εάν ε_m είναι η μέγιστη απόλυτη τιμή της παραμόρφωσης, τότε ισχύει:

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{c}{\varepsilon_m}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_m$$

ρ = ακτίνα του τόξου DE,

c = απόσταση από ουδέτερο άξονα

Τάσεις λόγω κάμψης

- Για ένα γραμμικά ελαστικό υλικό,

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{y}{c}E\varepsilon_m$$

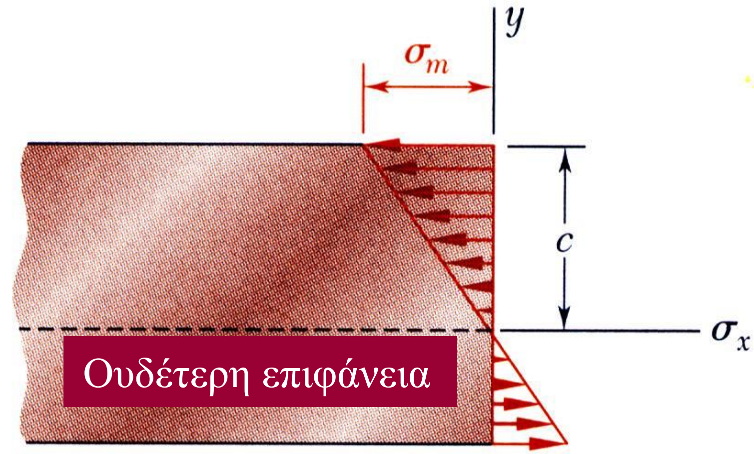
$$= -\frac{y}{c}\sigma_m \quad \text{(γραμμική μεταβολή της τάσης)}$$

- Οι συνθήκες στατικής ισορροπίας,

$$F_x = 0 = \int \sigma_x \, dA = \int -\frac{y}{c}\sigma_m \, dA$$

$$0 = -\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA$$

Η *πρωτοβάθμια ροπή* $\int y \, dA = 0$ της εγκάρσιας διατομής ως προς τον ουδέτερο άξονά της είναι μηδέν. Επομένως, η ουδέτερη επιφάνεια πρέπει να περνά από το κέντρο της διατομής.



- Η στατική ισορροπία δίδει:

$$M = \int(-y\sigma_x \, dA) = \int(-y)\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right)dA$$

$$M = \frac{\sigma_m}{c}\int y^2 \, dA = \frac{\sigma_m I}{c}$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

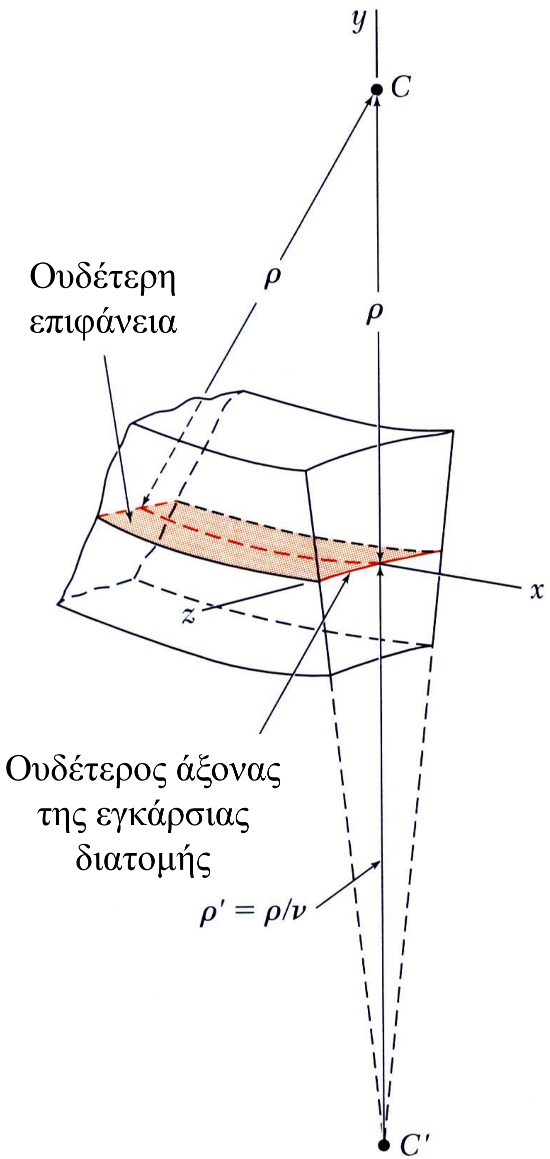
Αντικαθιστώντας την $\sigma_m = -\frac{c}{y}\sigma_x$,

$$\frac{Mc}{I} = -\frac{c}{y}\sigma_x \Leftrightarrow$$

$$\therefore \sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$I =$ ροπή αδράνειας (δευτεροβάθμια ροπή)

Παραμορφώσεις σε μια εγκάρσια διατομή



- Η παραμόρφωση λόγω της καμπτικής ροπής M μπορεί να υπολογιστεί από την καμπυλότητα της ουδέτερης επιφάνειας

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I} = \frac{M}{EI}$$

- Μολονότι η εγκάρσια διατομή ενός μέλους σε καθαρή κάμψη παραμένει επίπεδη, οι παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής δεν είναι μηδενικές,

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \frac{\nu y}{\rho} \qquad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = \frac{\nu y}{\rho}$$

- Η διαστολή των στοιχείων που βρίσκονται πάνω από την ουδέτερη επιφάνεια και η συστολή αυτών κάτω της έχουν ως αποτέλεσμα οι οριζόντιες γραμμές στη διατομή να κάμπτονται σε τόξα κύκλου,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} = \text{αντικλαστική καμπυλότητα}$$