Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθούν ορισμένα στοιχεία ψηφιακών ηλεκτρονικών, η γνώση των οποίων είναι απαραίτητη. Τη σημερινή εποχή, σχεδόν όλες οι ηλεκτρονικές συσκευές αποτελούνται κατά ένα μεγάλο μέρος τους από ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα.Ο κόσμος γύρω μας τείνει να γίνει ψηφιακός, με τις ψηφιακές τηλεπικοινωνίες, τους ψηφιακούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές, τις ψηφιακές τηλεοράσεις και βιντεοκάμερες, τα ψηφιακά κινητά τηλέφωνα κ.λ.π.

Στο τέλος του κεφαλαίου ο μαθητής θα πρέπει να:

- *Μπορεί να επεξηγεί την λειτουργία του τρανζίστορ σε καθεστώς κόρου και καθεστώς αποκοπής*
- *Γνωρίζει τα συστήματα αρίθμησης δεκαδικό, δυαδικό και οκταδικό και τη μετατροπή αριθμών από το ένα σύστημα στο άλλο*
- *Γνωρίζει τα λογικά σύμβολα, τη λογική συνάρτηση και τους πίνακες αληθείας των βασικών λογικών πυλών*
- *Χρησιμοποιεί τα στοιχεία της άλγεβρας Boole για ανάπτυξη απλών λογικών συναρτήσεων*
- *Σχεδιάζει κυκλώματα με λογικές πύλες και LED*
- *Αντικαθιστά κάθε πύλη και υλοποιεί κάθε λογικό κύκλωμα μόνο με πύλες NAND*
- *Επεξηγεί τα λειτουργικά διαγράμματα των βασικών πυλών σε ολοκληρωμένη μορφή*

7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ

7.1 Το τρανζίστορ σε διακοπτική λειτουργία

Όπως αναφέρθηκε στο 1^{o} Κεφάλαιο, **ψηφιακό** είναι το σήμα το οποίο παίρνει διακριτές μόνο τιμές και στα ψηφιακά ηλεκτρονικά παίρνει μόνο δύο τιμές, μία υψηλή (HIGH,H) και μία χαμηλή (LOW, L). Στην υψηλή τιμή αντιστοιχούμε το λογικό "1", ενώ στη χαμηλή συνήθως το λογικό "0".

Οι ψηφιακές τιμές αυτές λέγονται **λογικές**, διότι μπορεί να αντιστοιχούν σε άλλες φυσικές ή πραγματικές. Π.χ. το λογικό "1" μπορεί να αντιστοιχεί σε πραγματική τιμή +5V, ενώ το λογικό "0" μπορεί να αντιστοιχεί σε πραγματική τιμή +0,5V. Σε διαφορετική περίπτωση, το λογικό "1" μπορεί να αντιστοιχεί σε πραγματική τιμή +10V, ενώ το λογικό "0" σε πραγματική τιμή –10V. Υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις αντιστοιχίας που θα εξετασθούν παρακάτω.

Οι 2 λογικές τιμές αντιστοιχούνται σε φυσικές ποσότητες που μπορεί να παραχθούν είτε από την έξοδο μιας γεννήτριας παλμών, είτε από την έξοδο ενός διακόπτη (κεφάλαιο 1^{o}, σχ. 1.2.5.) Σαν λογικό "1" θεωρείται το άναμμα μιας λάμπας, το κλείσιμο ενός διακόπτη, η ύπαρξη τάσης ή ρεύματος σ'ένα κύκλωμα κ.α. Αντιθέτως, όταν η λάμπα είναι σβηστή, ο διακόπτης ανοικτός, δεν υπάρχει ρεύμα σ' ένα κύκλωμα, κ.λ.π. η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί σαν λογικό "0". Ο πίνακας 7.1 δείχνει τις διαφορετικές περιπτώσεις λογικού "0" και "1".

Λογικό "1"	**Λογικό "0"**
Κλειστός διακόπτης	Ανοικτός διακόπτης
Λάμπα αναμμένη	Λάμπα σβηστή
Σωστή πρόταση	Λάθος πρόταση
Αλήθεια	Ψέμα
Ρεύμα στο κύκλωμα	Όχι ρεύμα στο κύκλωμα
ΝΑΙ	ΟΧΙ
Δίοδος άγει	Δίοδος δεν άγει
Τρανζίστορ άγει	Τρανζίστορ δεν άγει

Πίνακας 7.1

Συνήθως το λογικό "1" αντιστοιχεί σε τάση +5V, ενώ το λογικό "0" αντιστοιχεί σε τάση 0V (TTL συστήματα.)

Τα δύο αυτά λογικά ψηφία, "0" και "1", καλούνται **μπιτς** (**bits**), από τις λέξεις **μπ**άϊναρυ ντιτ**ζιτς** (**bi**nary dig**its**) ή δυαδικά ψηφία και αποτελούν, όπως θα εξετασθεί παρακάτω, στοιχεία ενός νέου και πολύ χρήσιμου συστήματος του δυαδικού αριθμητικού συστήματος.

Η χρησιμοποίηση τρανζίστορ σε συνδεσμολογία κοινού εκπομπού, μπορεί δώσει λογικό "0" και "1", όταν το τρανζίστορ λειτουργεί στις περιοχές του κόρου και της αποκοπής.

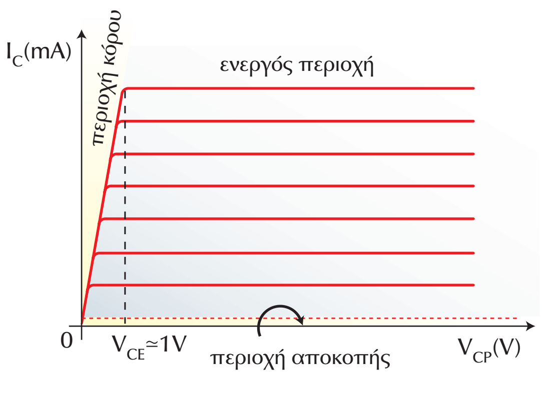
Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 4, κάθε τρανζίστορ, σε συνδεσμολογία κοινού εκπομπού, μπορεί να λειτουργήσει σε τρείς περιοχές (ενεργός, αποκοπής, κόρου) ανάλογα με τις τιμές των τάσεων και ρευμάτων εισόδου και εξόδου.

Η περιοχή αποκοπής είναι η περιοχή των χαρακτηριστικών εξόδου του τρανζίστορ I_C V_{CE} για ρεύμα βάσης I_b =0. Η αποκοπή συμβαίνει όταν η δίοδος βάσης-εκπομπού είναι ανάστροφα πολωμένη και επομένως δεν υπάρχει ρεύμα συλλέκτη, I_c =0 ή η τάση επαφής ΒΕ είναι μικρότερη από 0,5 V (τυπική περίπτωση). Τότε το τρανζίστορ δεν άγει, αντιστοιχεί με ανοικτό διακόπτη, είναι **εκτός (OFF)** και εκφράζει **το λογικό ”1”.**

Η περιοχή κόρου είναι η περιοχή των ίδιων χαρακτηριστικών εξόδου όταν η τάση συλλέκτη-εκπομπού, V_{CE},, είναι πολύ μικρή (≈ 0,4–0,5V). Η περιοχή κόρου χαρακτηρίζεται από πολύ μικρότερο ρεύμα συλλέκτη σε σχέση με το ρεύμα στο σημείο λειτουργίας του τρανζίστορ. Τότε το τρανζίστορ άγει, αντιστοιχεί με κλειστό διακόπτη,είναι **εντός (ΟΝ)** και εκφράζει **το λογικό “0”.**

Στο σχήμα 7.1 φαίνονται οι περιοχές κόρου και αποκοπής στις χαρακτηριστικές $I_C \cdot V_{CE}$ ενός τρανζίστορ.

Με κατάλληλες συνδεσμολογίες μπορεί ένα τρανζίστορ σε συνδεσμολογία κοινού εκπομπού, να μεταβεί από την περιοχή αποκοπής κατευθείαν στην περιοχή κόρου και αντίστροφα και συνεπώς να δημιουργήσει αλληλουχίες λογικών "0" και ′′1", δηλαδή ψηφιακά σήματα,π.χ.001101, 010011001κ.λ.π.



Σχήμα 7.1 Περιοχές κόρου-αποκοπής τρανζίστορ

7.2 Στοιχεία συστημάτων αρίθμησης - Δεκαδικό

Ο άνθρωπος χρησιμοποιούσε ανέκαθεν αριθμητικά συστήματα για να μετράει τις ποσότητες των αγαθών και να κάνει αριθμητικές πράξεις όπως πρόσθεση, αφαίρεση κ.λ.π.Το πιο διαδεδομένο αριθμητικό σύστημα είναι **το δεκαδικό** γιατί χρησιμοποιεί 10 ψηφία (νούμερα),όσα και τα δάχτυλα των χεριών του ανθρώπου. Οι μετατροπές και οι αξίες των αγαθών υπολογίζονται εύκολα με το δεκαδικό σύστημα.

Ένα κιλό έχει 1000 γραμμάρια, ένα μέτρο υποδιαιρείται σε 100 εκατοστά ή 1000 χιλιοστά. Οι Αγγλοσάξωνες χρησιμοποιούσαν το δωδεκαδικό σύστημα μέτρησης. Μία πάουντ (pt) έχει 12 ουγγιές και ένα πόδι (foot) έχει 12 ίντσες (in). Από το 1960 χρησιμοποιείται το διεθνές σύστημα μονάδων (S.I) και όλα τα κράτη χρησιμοποιούν τις ίδιες μονάδες μέτρησης και τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια τους που βασίζονται στο δεκαδικό σύστημα.

Το **δεκαδικό** σύστημα έχει **βάση** τον αριθμό **10,** δηλ.χρησιμοποιούνται **10 ψηφία,** τα **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.** Τα ψηφία αυτά όταν τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο, μπορούν να σχηματίσουν διψήφιους, τριψήφιους ή πολυψήφιους αριθμούς, π.χ 12, 345, 5647 κ.λ.π. Η θέση κάθε ψηφίου σ'ένα πολυψήφιο αριθμό δείχνει και την αξία ή τη βαρύτητα του. Το τελευταίο δεξιά ψηφίο δείχνει τις μονάδες, το επόμενο προς τα αριστερά δείχνει τις δεκάδες, το επόμενο εκατοντάδες κ.λ.π.

Π.χ. ο αριθμός 356 έχει 3 εκατοντάδες, 5 δεκάδες και 6 μονάδες.

Μερικές φορές στο ψηφίο των μονάδων και σαν δείκτης γράφεται ο αριθμός 10 για να δείξει ότι ο αριθμός είναι δεκαδικός. Ένας δεκαδικός αριθμός αναλύεται σε άθροισμα των γινομένων του κάθε ψηφίου του με δύναμη του δέκα υψωμένη σε εκθέτη, ανάλογα με την βαρύτητα του κάθε ψηφίου:

Μονάδες $= 10^0$, Δεκάδες $= 10^1$, Εκατοντάδες $= 10^2$
Χιλιάδες $= 10^3$, Δέκα χιλιάδες $=10^4$ κ.λ.π.

Έτσι ο αριθμός 8543_{10} αναλύεται ως εξής:

$$(8543)_{10} = 8 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \qquad 7.1.1$$

Παρατηρείται ότι **ο μεγαλύτερος εκθέτης των δυνάμεων του 10 είναι μικρότερος κατά 1 του αριθμού των ψηφίων του αριθμού,** π.χ. εκθέτης (3) = ψηφία (4) –1.

Ένας δεκαδικός αριθμός αναλύεται με τον πιο πάνω τρόπο, αλλά οι δυνάμεις του 10 είναι και αρνητικές:

Π.χ. $1{,}135 = 1 \times 10^{0} + 1 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$

Παράδειγμα 7.2.1

Να γραφεί ο δεκαδικός αριθμός 71356,675 αναλυτικά.

Λύση

Το κάθε ψηφίο του αριθμού έχει και μία βαρύτητα (αξία) και εκφράζεται με μία δύναμη του 10, ανάλογα με τη θέση του. Το 7 είναι στην $5^{η}$ θέση και η βαρύτητα του είναι $10^{5-1} = 10^{4} = 10000$. Ομοίως το ψηφίο 1 είναι στην $4^{η}$ θέση και εκφράζει χιλιάδες, το 3 εκφράζει εκατοντάδες κ.λ.π. Έτσι ο αριθμός γράφεται:

$$71356{,}675 = 7 \times 10^{4} + 1 \times 10^{3} + 3 \times 10^{2} + 5 \times 10^{1} + 6 \times 10^{0} + \\ + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}.$$

Εκτός από το δεκαδικό σύστημα που έχει βάση το 10, θεωρητικά μπορεί να υπάρχουν συστήματα με βάση οποιονδήποτε φυσικό αριθμό π.χ 2,3,4,6,7,8,12,14,16... Από τα συστήματα αυτά, τα πιο χρήσιμα που χρησιμοποιούνται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, είναι **το δυαδικό** με βάση το 2, **το οκταδικό** με βάση το 8 (2^{3}) και **το δεκαεξαδικό** με βάση τον αριθμό 16 (2^{4}).

7.2.1 Δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Το δεκαδικό σύστημα, το οποίο έχει δέκα ψηφία, δηλαδή δέκα διαφορετικές καταστάσεις, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους υπολογισμούς και την επεξεργασία σημάτων στους ψηφιακούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές που αποτελούνται από ψηφιακά κυκλώματα δύο καταστάσεων. Ένα κατάλληλο αριθμητικό σύστημα είναι **το δυαδικό ή μπάϊναρυ (binary)** σύστημα, το οποίο έχει βάση το 2 και επομένως 2 ψηφία το “0” και το “1”, τα οποία ονομάζονται **μπιτ (Bit).**

Οι δυαδικοί αριθμοί μπορεί να είναι όπως και οι δεκαδικοί, μονοψήφιοι, διψήφιοι ή πολυψήφιοι. Η θέση κάθε ψηφίου δείχνει και την αξία του στον αριθμό. Το τελευταίο δεξιά ψηφίο είναι το ψηφίο των μονάδων (2^{0}) το επόμενο προς αριστερά είναι το ψηφίο των δυάδων (2^{1}),μετά των τετράδων (2^{2}), οκτάδων (2^{3}), δεκαεξάδων (2^{4}) κ.λ.π.

Ένας τετραψήφιος δυαδικός αριθμός γράφεται κατ' αναλογία του δεκαδικού αριθμού, όπου η βαρύτητα του πρώτου ψηφίου είναι δύναμη του δύο υψωμένη στον αριθμό 4–1=3, δηλαδή έχει οκτάδες, τετράδες, δυάδες και μονάδες.

Π.χ. $$1011_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0. \qquad 7.2.1$$

Εάν ο δυαδικός αριθμός περιέχει και δεκαδικά ψηφία, τότε οι δυνάμεις του 2 είναι αρνητικές, δηλαδή υπάρχουν μισές μονάδες (2^{-1}), τέταρτα μονάδας (2^{-2}), όγδοα μονάδας κ.λ.π.

Π.χ. $110{,}011_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$.

Το πρώτο αριστερά ψηφίο κάθε δυαδικού αριθμού, λέγεται **περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB, Most Significant Bit ,),** ενώ το τελευταίο δεξιά ονομάζεται **λιγότερο σημαντικό ψηφίο (LSB, Least significant Bit)** και έχει τη μικρότερη αξία. Στον παραπάνω δυαδικό αριθμό είναι MSB = 1, LSB = 1.

Ένας οκταψήφιος δυαδικός αριθμός (8 bit),π.χ. 10110101, λέγεται **μπάϊτ (byte),** ενώ ένας τετραψήφιος δυαδικός αριθμός, π.χ. 1101, λέγεται **νίμπλ (nibble).**

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές χρησιμοποιούν για τη μεταφορά δεδομένων, καθώς και για τη μνήμη τους ομάδες από bits που ονομάζονται **γουόρντ (word)** και αποτελούνται από 1 ή 2 ή 3 ή 4 bytes, δηλαδή 8bit, 16bit, 32bit ή 64bit αντίστοιχα, ανάλογα με την αρχιτεκτονική του υπολογιστή.

Ιστορικά ο πρώτος ψηφιακός μικροεπεξεργαστής παρουσιάστηκε το 1971 από την εταιρεία INTEL,με κωδική ονομασία 4004, και είχε λέξη των 4 bit. Σήμερα οι προσωπικοί υπολογιστές έχουν λέξεις των 16 ή 32 bit, ενώ οι σταθμοί εργασίας (workstations) έως και λέξεις των 64bit.

7.2.1.1 Μετατροπή δυαδικού αριθμού σε δεκαδικό

Η μετατροπή δυαδικού αριθμού σε δεκαδικό γίνεται με τον υπολογισμό της αξίας του, βάσει της εξίσωσης (7.2). Οι αξίες υπολογίζονται βάσει του πίνακα:

Ψηφία	B_n	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0	B_{-1}	B_{-2}	$...B_{-n}$
Αξία Ψηφίου	2^n	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-n}
Αξία	...	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	...

Πίνακας 7.2.1.

Ένας δυαδικός αριθμός π.χ. 10101110 μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό με τον κάτωθι εποπτικό τρόπο:

Δυαδικός	1	0	1	0	1	1	1	0
Θέση	7^n	6^n	5^n	4^n	3^n	2^n	1^n	0
Αξία ψηφίου	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Δεκαδικός	128	0	32	0	8	4	2	2⇒
Δεκαδικός = 128+32+8+4+2 = 274_{10}								

Πίνακας 7.2.2.

Η μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού σε δεκαδικό ευρίσκεται αν προσθέσουμε τις αξίες κάθε ψηφίου του αριθμού που είναι μονάδα (1).

Εάν ο δυαδικός αριθμός περιέχει και δεκαδικά ψηφία θα είναι:

Δυαδικός	1	1	0	1	,	0	1	1
↓	↓	↓		↓			↓	↓
Αξία Ψηφίου	8	4		1	,		0,25	+0,125

Δεκαδικός 8+4+1+0,25+0,125

=13,375. Άρα: $1101,011_2 = 13,375_{10}$

Ο πίνακας 7.2.3 δίδει την αντιστοιχία μεταξύ δεκαδικών και δυδικών αριθμών από 0–9.

Δεκαδικός	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δυαδικός	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

Πίνακας 7.2.3.

7.2.1.2 Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό

Για να μετατραπεί ένας δεκαδικός αριθμός σε δυαδικό, χρησιμοποιείται η μέθοδος των διαδοχικών διαιρέσεων δια 2. Διαιρούμε τον αριθμό δια δύο, μέχρι να προκύψει ακέραιο πηλίκο και σημειώνουμε το υπόλοιπο το οποίο αποτελεί το λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού. (LSB)., δηλαδή το ψηφίο των μονάδων. Άν ο αριθμός είναι ζυγός, τότε LSB = 0, αν είναι μονός τότε (LSB)=1. Στη συνέχεια διαιρούμε το πηλίκο της πρώτης διαίρεσης δια 2 και το υπόλοιπο αποτελεί το ψηφίο των δυάδων. Συνεχίζεται η διαίρεση του πηλίκου δια 2 μέχρι να βρούμε πηλίκο 0. Το υπόλοιπο της τελευταίας διαίρεσης αυτής αποτελεί το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB).

Π.χ. ο δεκαδικός αριθμός 57_{10} μετατρέπεται σε δυαδικό ως εξής:

57 / 2	=	28	με υπόλοιπο	1	(LSB)
28 / 2	=	14	με υπόλοιπο	0	
14 / 2	=	7	με υπόλοιπο	0	
7 / 2	=	3	με υπόλοιπο	1	
3 / 2	=	1	με υπόλοιπο	1	
1 / 2	=	0	με υπόλοιπο	1	(MSB)

Ο δυαδικός αριθμός γράφεται με πρώτο ψηφίο το τελευταίο υπόλοιπο, δηλαδή το MSB και τελευταίο το LSB. Δηλαδή ο αριθμός είναι 6μπιτος:

$$\mathbf{57_{10} = 111001_2}$$

Για επαλήθευση, μετατρέπεται ο δυαδικός σε δεκαδικό και είναι:

$$111001_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 57_{10.}$$

Παράδειγμα 7.2.2

Να μετατραπεί ο δεκαδικός 36_{10} σε δυαδικό αριθμό.

Λύση

Για να βρεθεί ο δυαδικός αριθμός γίνονται συνεχείς διαιρέσεις δια 2 μέχρι το πηλίκο να γίνει 0.

36 / 2	=	18	με υπόλοιπο	0	(LSB)
18 / 2	=	9	με υπόλοιπο	0	
9 / 2	=	4	με υπόλοιπο	1	
4 / 2	=	2	με υπόλοιπο	0	
2 / 2	=	1	με υπόλοιπο	0	
1 / 2	=	0	με υπόλοιπο	1	(MSB). Άρα ο δυαδικός είναι 100100_2

7.2.2 Οκταδικό σύστημα αρίθμησης

Στο **οκταδικό** σύστημα, η **βάση** είναι το **8** και τα ψηφία είναι **0,1,2,3,4,5,6,7.** Οι οκταδικοί αριθμοί έχουν, όπως και τα άλλα αριθμητικά συστήματα, μονάδες (8^0), οκτάδες (8^1), εξηντατετράδες (8^2) κ.λ.π. Το οκταδικό σύστημα χρησιμοποιείται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, πολλές φορές αντί του δυαδικού συστήματος, διότι χρησιμοποιούνται λιγότερα ψηφία. Στον πίνακα 7.3 δίδεται η αντιστοιχία μεταξύ των τριών συστημάτων, δεκαδικού, δυαδικού και οκταδικού για τους αριθμούς 0–15.

Δεκαδικός	Δυαδικός	Οκταδικός	Δεκαδικός	Δυαδικός	Οκταδικός
0	0000	0	8	1000	10
1	0001	1	9	1001	11
2	0010	2	10	1010	12
3	0011	3	11	1011	13
4	0100	4	12	1100	14
5	0101	5	13	1101	15
6	0110	6	14	1110	16
7	0111	7	15	1111	17

Πίνακας 7.2.4.

Κάθε οκταδικός αριθμός έχει στο κάτω μέρος του λιγότερου σημαντικού ψηφίου του (LSB) το δείκτη 8, π.χ. ο αριθμός 137_8 είναι τριψήφιος αριθμός του οκταδικού συστήματος.

Ένας οκταδικός αριθμός μετατρέπεται στον αντίστοιχο δεκαδικό, υπολογίζοντας την αξία του κάθε ψηφίου του και προσθέτοντας, κατ' αναλογία της μετατροπής του δυαδικού σε δεκαδικό (σχέση 7.2:)2

$$\begin{aligned} \mathbf{364_8} &= \mathbf{3 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 4 \times 8^0 =} \\ &\mathbf{3 \times 64 + 6 \times 8 + 4 \times 1 =} \\ &\mathbf{192 + 48 + 4 = 244_{10}} \end{aligned} \qquad \mathbf{7.2.2}$$

Η χρησιμοποίηση του οκταδικού συστήματος δεν είναι τυχαία. Ο αριθμός 8 είναι μια δύναμη του 2 και συγκεκριμένα $8 = 2^{3.}$ Δηλαδή κάθε ψηφίο ενός οκταψήφιου αριθμού απεικονίζεται με 3 ψηφία δυαδικού αριθμού. ($7_8 = 111_{2,}$ $77_8 = 111/111_2$, $777_8 = 111/111/111_2$ κ.λ.π.).

Η μετατροπή ενός οκταδικού αριθμού σε δυαδικό γίνεται αν για κάθε ψηφίο του οκταδικού αριθμού γραφεί ο αντίστοιχος τριψήφιος δυαδικός αριθμός.

Π.χ. $57_8 = 5 \,|\, 7 = 101 \,|\, 111 = 101111_2$.

$763_8 = 7 \,|\, 6 \,|\, 3 = 111 \,|\, 110 \,|\, 011 = 111110011_2$

Με παρόμοιο τρόπο γίνεται και η μετατροπή ενός δυαδικού σε οκταδικό αριθμό. Αν ο δυαδικός αριθμός έχει 3 ή 6 ή 9 ... ψηφία,είναι εύκολη η μετατροπή του γιατί θα έχει ο αντίστοιχος οκταδικός 1 ή 2 ή 3... ψηφία αντίστοιχα. Αν ο δυαδικός αριθμός έχει 1, 2, 4, 5 ή 7... ψηφία, προσθέτουμε τόσα μηδενικά στην αρχή του αριθμού μέχρι να έχει αριθμό ψηφίων πολλαπλάσιο του 3.

Π.χ. $100110_2 = 100 \,|\, 110 = 46_8$

$1100110 = 001100110 = 001 \,|\, 100 \,|\, 110 = 14\,6_8$.

Πράγματι: $146_8 = 1 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 6 \times 8^0 = 102_{10}$,

$1100110_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 64 + 32 + 4 + 2 = 102_{10}$.

Τέλος η μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε οκταδικό, γίνεται με συνεχείς διαιρέσεις δια 8. Π.χ. ο αριθμός 435_{10} μετατρέπεται:

435 / 8	=	54	με υπόλοιπο	3	(LSB)
54 / 8	=	6	με υπόλοιπο	6	
6 / 8	=	0	με υπόλοιπο	6	(MSB). Άρα $435_{10} = 663_8$

Για επαλήθευση θα είναι: $663_8 = 6 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 435_{10}$

Παράδειγμα 7.2.3

Να γίνει μετατροπή του οκταδικού αριθμού 767_8 σε δεκαδικό και σε δυαδικό.

Λύση

$767_8 = 7 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 448 + 48 + 7 = 503_{10}$,

$767_8 = 111/\,110/\,111_2$

Πράγματι: $111110111_2 = 256+128+64+32+16+4+2+1 = 503_{10}$.

7.2.3 Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα

Η πρόσθεση στο δυαδικό σύστημα, γίνεται όπως και στο δεκαδικό σύστημα. Ο ένας αριθμός γράφεται κάτω από τον άλλο και προστίθεται κάθε ψηφίο χωριστά, αρχίζοντας από το ψηφίο με τη λιγότερη αξία

(LSB). Όταν προστίθενται 2 μονάδες, επειδή το άθροισμα είναι 2, που είναι μεγαλύτερο από τη βάση του δυαδικού συστήματος, γράφεται 10, δηλαδή άθροισμα 0 και κρατούμενο 1 το οποίο προστίθεται με τα αμέσως επόμενα ψηφία. Το ίδιο συμβαίνει και με τους δεκαδικούς αριθμούς όταν προστίθεται 9+9 =18. Το άθροισμα είναι 8 και υπάρχει και κρατούμενο 1. Έτσι οι δυνατοί συνδυασμοί για την πρόσθεση είναι:

			+1	κρατούμενο
0	0	1	1	1
+1	+0	+0	+1	1
				+1
1	0	1	0	1

Για διευκόλυνση, γράφεται δίπλα στη δυαδική πρόσθεση και η αντίστοιχη δεκαδική. Π.χ.

1			1 1 1		
0011	→	3	101101	→	45
+ 1010	→	+10	+110101	→	+53
1101	→	13	1100010	→	98

Η αφαίρεση δυαδικών αριθμών γίνεται όπως και η αφαίρεση δεκαδικών αριθμών. Έτσι διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις :

			– 1 Δανειζόμενο
0	1	1	0
– 0	– 1	– 0	– 1
0	0	1	1

Π.χ.

1011	→	11	101111	→	47	1101	→	13
– 0001	→	–1	–101101	→	– 45	1011	→	– 11
1010	→	10	00010	→	02	0010	→	02

Η αφαίρεση δυαδικών αριθμών μπορεί να γίνει και με άλλο τρόπο.

Αφαίρεση αριθμών πραγματοποιείται άν προστεθεί στο μειωτέο το συμπλήρωμα του αφαιρετέου.

Υπάρχουν 2 συμπληρώματα ενός αριθμού, α) το συμπλήρωμα του αριθμού ως προς τη βάση (B) του αριθμητικού συστήματος και β) το συμπλήρωμα ως προς το μεγαλύτερο ψηφίο του αριθμητικού συστήματος, δηλαδή ως προς (Β–1).

Στο δεκαδικό σύστημα υπάρχει το συμπλήρωμα ενός αριθμού ως προς 10 και το συμπλήρωμα του αριθμού ως προς 9. Κατ' αναλογία, στο δυαδικό σύστημα υπάρχει το συμπλήρωμα ενός δυαδικού αριθμού ως προς 2 και το συμπλήρωμα του δυαδικού αριθμού ως προς το 1.

Π.χ. Το συμπλήρωμα του δεκαδικού αριθμού 6 είναι :

ως προς 10 : $\overline{6} = 10 - 6 = 4$

ως προς 9 : $\overline{6} = 9 - 6 = 3$

Το συμπλήρωμα των δυαδικών αριθμών 0 και 1 είναι:

ως προς 2 : $\overline{1} = 2 - 1 = 1$

$\overline{0} = 2 - 0 = 2$

ως προς 1: $\overline{1} = 1 - 1 = 0$

$\overline{0} = 1 - 0 = 1$

Το συμπλήρωμα, ως προς 1, του δυαδικού αριθμού 1 είναι το 0 και του δυαδικού αριθμού 0 είναι το 1.

Βάσει του ανωτέρω, για να βρεθεί **το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός πολυψήφιου** δυαδικού αριθμού, **εναλλάσσονται οι θέσεις των άσσων και μηδενικών,** δηλαδή το 1 γίνεται 0 και το 0 γίνεται 1.

Το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός αριθμού Α παρίσταται με παύλα πάνω στον αριθμό, ($\overline{A}$).

Παράδειγμα 7.2.4

Να ευρεθούν τα συμπληρώματα ως προ 9 των αριθμών 35 και 143 του δεκαδικού συστήματος και τα συμπληρώματα ως προς 1 των αριθμών 110110 , 01011010 του δυαδικού.

Λύση

Για το δεκαδικό σύστημα το συμπληρώματα του 35 θα βρεθεί αν αφαιρεθεί ο αριθμός από το 99, επειδή είναι διψήφιος, ενώ το συμπλήρωμα του 143 θα βρεθεί με την αφαίρεση από το 999, επειδή είναι τριψήφιος. Έτσι:

$\overline{35} = 99 - 35 = 64$

$\overline{143} = 999 - 143 = 856$

ή

$$\begin{array}{r} 99 \\ -35 \\ \hline 64 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 999 \\ -143 \\ \hline 856 \end{array}$$

Για το δυαδικό σύστημα, το συμπλήρωμα των αριθμών βρίσκεται με αντικατάσταση των 0 με 1 και των 1 με 0. Έτσι :

$\overline{110110} = 001001$ και $\overline{01011010} = 10100101$.

Παρακάτω θα δοθεί ο τρόπος αφαίρεσης δυαδικών αριθμών με τη χρησιμοποίηση του συμπληρώματος της μονάδας. Παρατίθεται επίσης και η αφαίρεση του αντίστοιχου δεκαδικού αριθμού για σύγκριση. Προσθέτοντας το συμπλήρωμα του αφαιρετέου στον μειωτέο, θα προκύψει ένα επιπλέον ψηφίο, το οποίο προφανώς θα είναι 1, διότι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι μεγαλύτερο του 1111_2 ή μεγαλύτερο του 99_{10}. Η μονάδα αυτή προστίθεται στο άθροισμα και έτσι προκύπτει το αποτέλεσμα. Π.χ.

$$\begin{array}{rcr} & & 1\ 1 \\ 1011 & \rightarrow & 1011 \\ -\,0101 & \rightarrow & +1010 \\ \hline & & 10101 \\ & & +1 \\ \hline & & \mathbf{0110} \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} & & 1 \\ 11 & \rightarrow & 11 \\ -\,5 & \rightarrow & +94 \\ \hline 6 & & 105 \\ & & +1 \\ \hline & & \mathbf{6} \end{array}$$

Πράγματι : $110_2 = 6_{10}$.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 7.2

- Το **δεκαδικό** σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιείται από τον άνθρωπο επειδή είναι το πιο κατανοητό.
- Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής χρησιμοποιεί το **δυαδικό** σύστημα, το οποίο είναι κυκλωματικά το πιο απλό σύστημα αρίθμησης.
- Χρησιμοποιείται επίσης το **οκταδικό** και ιδίως το **16-εξαδικό** σύστημα σαν ενδιάμεσο μεταξύ ανθρώπου - υπολογιστού και κυρίως για τις μονάδες **εισόδου-εξόδου.**

- Η **μετατροπή** ενός **δεκαδικού** αριθμού **σε δυαδικό** ή **οκταδικό** αριθμό πραγματοποιείται δια συνεχών διαιρέσεων του δεκαδικού αριθμού δια 2 ή δια 8 αντίστοιχα.
- Η **μετατροπή** ενός **δυαδικού** ή **οκταδικού** αριθμού σε **δεκαδικό** πραγματοποιείται με τον υπολογισμό της αξίας όλων των ψηφίων και άθροιση των επι μέρους αξιών.
- Η **πρόσθεση δυαδικών** αριθμών γίνεται κατ' αναλογία της πρόσθεσης των δεκαδικών.
- Η **αφαίρεση δυαδικών** αριθμών μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση του **συμπληρώματος** του αριθμού ως προς 2 ή ως προς 1.
- Το **συμπλήρωμα** ενός αριθμού ως προς 1 βρίσκεται αν αντικατασταθούν οι μονάδες με μηδενικά και τα μηδενικά με μονάδες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.2

7.2.1. Αναφέρετε τις διαφορές μεταξύ δεκαδικού και δυαδικού συστήματος.

7.2.2. Γιατί χρησιμοποιείται το δυαδικό σύστημα στις λειτουργίες των ηλεκτρονικών υπολογιστών;

7.2.3. Αναφέρετε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η αφαίρεση δυαδικών αριθμών με την χρησιμοποίηση του συμπληρώματος ως προς 1.

7.2.4. Μετατρέψετε τους δυαδικούς αριθμούς 1001_2 και 10011101_2 σε δεκαδικούς.

7.2.5. Να μετατραπούν οι δεκαδικοί αριθμοί 1_{10}, 25_{10}, 64_{10}, 145, 3_{10} σε δυαδικούς αριθμούς.

7.2.6. Σε ποιους δεκαδικούς αριθμούς αντιστοιχούν οι οκταδικοί: 753_8 156_8 και 234_8

7.2.7. Να μετατραπούν οι δυαδικοί αριθμοί 100111 και 1110 σε οκταδικούς και οι οκταδικοί 56_8 και 34_8 σε δυαδικούς.

7.2.8. Εκτελέστε τις παρακάτω αφαιρέσεις στο δυαδικό σύστημα:

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{-\ 101} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11100101 \\ \underline{-\ 1110110} \end{array}$$

7.2.9. Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις με την χρήση του συμπληρώματος της μονάδας (ως προς 1).

$$\begin{array}{l} 0111 \\ \underline{-010} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10110111 \\ \underline{-01101011} \end{array}$$

7.2.10. Να μετατραπούν οι δεκαδικοί αριθμοί 158_{10} , 83_{10}, 408, 5_{10} σε οκταδικούς

7.2.11. Να μετατραπούν οι δυαδικοί αριθμοί $1010{,}011_2$, 10011011_2 σε δεκαδικούς.

7.2.12. Να ευρεθούν τα συμπληρώματα ως προς 1 των δυαδικών αριθμών 10011011_2 & $110101{,}0110_2$,

7.2.13. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

i) 101010 + 101111 ii) 1010101 – 0101110

7.2.14. Να μετατραπούν:

i) ο δυαδικός αριθμός 11001_2 σε δεκαδικό,

ii) ο οκταδικός αριθμός 52702_8 σε δεκαδικό,

iii) ο δεκαδικός αριθμός $323{,}203_{10}$ σε δυαδικό.

7.2.15. Να βρεθούν τα συμπληρώματα ως προς 9 των αριθμών 88_{10}, 642_{10}

7.2.16. Να βρεθούν τα συμπληρώματα ως προς 10 των αριθμών 125_{10}, 32_{10}.

7.3 Στοιχεία λογικών συναρτήσεων και άλγεβρας Boole

7.3.1 Δυαδικές συναρτήσεις

Αναφέρθηκε προηγουμένως, ότι στα ψηφιακά ηλεκτρονικά υπάρχουν 2 αριθμοί 0 και 1 ή δύο καταστάσεις on - off ή 2 συνθήκες κυκλώματος ανοικτό - κλειστό. Οι είσοδοι και οι έξοδοι των ψηφιακών κυκλωμάτων μπορούν να χαρακτηρισθούν από τις δύο αυτές καταστάσεις και επομένως να παρασταθούν συμβολικά με μεταβλητές από γράμματα του λατινικού αλφαβήτου όπως A, B, C, D, F, X, Y κ.λ.π.οι οποίες λαμβάνουν **δύο μόνο λογικές τιμές**, **τη λογική τιμή "1" και τη λογική τιμή "0".**

Οι λογικές αυτές μεταβλητές μπορούν να συνδυασθούν μεταξύ τους και να σχηματίσουν λογικές συναρτήσεις. Έτσι μπορεί να υπάρχουν συναρτήσεις της μορφής:

$$F = A + BC, \quad G = A \bullet B, \quad X = \overline{A} + C, \quad H = A \bullet B + \overline{C} \bullet D \text{ κ.λ.π}$$

Όπου τα σύμβολα $+, \bullet, \overline{\uparrow}$ θα ορισθούν παρακάτω.

Οι λογικές συναρτήσεις ακολουθούν ορισμένους βασικούς νόμους και κανόνες, οι οποίοι ακολουθούν μια **άλγεβρα** πολύ απλούστερη από την κλασσική άλγεβρα, στην οποία οι παράμετροι και οι συναρτήσεις είναι συνεχείς. Η άλγεβρα αυτή ονομάζεται **άλγεβρα Boole** και αναπτύχθηκε από το μαθηματικό **George Boole** (1815 – 1864).

Η άλγεβρα Boole, όπως και κάθε άλγεβρα, ακολουθεί ορισμένα αξιώματα και θεωρήματα και έχει και συγκεκριμένες μαθηματικές πράξεις και ιδιότητες.

7.3.2 Βασικά αξιώματα και πράξεις άλγεβρας Boole

Κάθε μεταβλητή στην άλγεβρα Boole έχει 2 τιμές τις "0" και "1" ή High και Low ή Ναι και Όχι. Στην επεξεργασία των λογικών συναρτήσεων θα χρησιμοποιηθεί η **"θετική λογική"** δηλαδή :

" 0 "	→	ανοικτό διακόπτη	→	Low	→	Όχι
" 1"	→	κλειστό διακόπτη	→	High	→	Ναι

ενώ η αρνητική λογική είναι αντίθετη της προηγουμένης.

Οι βασικές πράξεις της άλγεβρας Boole είναι τρείς:

Α. Λογική πράξη **ΚΑΙ (AND)** ή λογική σύζευξη με σύμβολο (•).

Β. Λογική πράξη **Η (OR)** ή λογική διάζευξη με σύμβολο (**+).**

Γ. Λογική πράξη **ΟΧΙ (NOT)** ή λογικό συμπλήρωμα με σύμβολο **(¯).**

Αν παραστήσουμε το αποτέλεσμα μιας λογικής πράξης με την μεταβλητή Y και τις μεταβλητές με A,B,C, θα ισχύει για κάθε λογική πράξη και μια λογική συνάρτηση, όπως :

Πράξη AND : $Y = A \bullet B$

Πράξη OR : $Y = A + B$

Πράξη NOT : $Y = \overline{A}$

όπου οι μεταβλητές A και B παίρνουν μόνο τις λογικές τιμές "0" και "1".

Τα θεωρήματα θεμελίωσης της άλγεβρας Boole την οποία ακολουθούν οι λογικές μεταβλητές, είναι τα ακόλουθα :

1. Πολλαπλασιασμός (AND)

$A \bullet A = A$

$A \bullet 0 = 0$

$A \bullet 1 = A$

2. Πρόσθεση (OR)

$A + A = A$

$A + 0 = A$

$A + 1 = 1$

3. Συμπλήρωμα (NOT)

$A \bullet \overline{A} = 0$

$A + \overline{A} = 1$

$\overline{\overline{(A)}} = A$

4. Αντιμεταθετική Ιδιότητα

$A + B = B + A$

$A \bullet B = B \bullet A$

5. Επιμεριστική Ιδιότητα $\quad A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$

6. Θεωρήματα De Morgan) $\quad \overline{A + B} = \bar{A} \bullet \bar{B}$

$$\overline{A \bullet B} = \bar{A} + \bar{B}$$

7.3.3 Πίνακας Αληθείας

Ο πίνακας αληθείας είναι ένας πίνακας ο οποίς περιλαμβάνει όλες τις δυνατές καταστάσεις των μεταβλητών μιας λογικής συνάρτησης. Για να σχηματισθεί ένας πίνακας αληθείας, γράφονται σε στήλες όλες οι μεταβλητές και συμπληρώνονται με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των μεταβλητών. Κατόπιν υπάρχει η στήλη της λογικής συνάρτησης ή λογικής πράξης.

Π.χ. Να βρεθεί ο πίνακας αληθείας της συνάρτησης F = A + B.

Η συνάρτηση F έχει 2 μεταβλητές εισόδου A και B, άρα έχει $2^2 = 4$ δυνατούς συνδιασμούς λογικών τιμών και ο πίνακας αληθείας είναι:

Μεταβλητές		Συνάρτηση
A	B	F = A +B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Πίνακας 7.3.1.

Μπορεί να γραφούν πολλές συναρτήσεις στον ίδιο πίνακα αληθείας μαζί. Ο κάτωθι πίνακας δίνει τις συναρτήσεις $D = A \bullet B$, $E = \bar{A} + B$ και $H = \bar{A} \bullet \bar{B}$. Σχηματίζονται τόσες στήλες όσες είναι και οι μεταβλητές:

(1) A	(2) B	(3) $\bar{A}$	(4) $\bar{B}$	(1) • (2) $A \bullet B$	(3) + (2) $\bar{A} + B$	(3) • (4) $\bar{A} \bullet \bar{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0

Πίνακας 7.3.2.

Οι αριθμοί σε παρένθεση πάνω από τον πίνακα, δηλώνουν τον αριθμό κάθε στήλης καθώς και τις πράξεις που πρέπει να γίνουν, για να βρεθούν οι καταστάσεις των λογικών συναρτήσεων. Π.χ. για να ευρεθεί ο πίνακας αληθείας της συνάρτησης $E = \overline{A}+B$, πρέπει να προστεθούν οι αριθμοί κάθε γραμμής των στηλών (3) και (2).

Η μέθοδος του πίνακα αληθείας μπορεί να αποδείξει τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole όπως επίσης, με τον πίνακα αληθείας, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές κάθε λογικής συνάρτησης. Στην πράξη, δημιουργούνται στήλες για κάθε μέλος της εξίσωσης και αν οι στήλες αυτές, για κάθε τιμή των μεταβλητών ή για κάθε δυνατή κατάσταση, συμπίπτουν, αυτό αποδεικνύει ότι ισχύει η εξίσωση. Το παρακάτω παράδειγμα αναλύει τη διαδικασία.

Παράδειγμα 7.3.1

Να αποδειχθεί με πίνακα αληθείας το θεώρημα του De Morgan:

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Λύση

Δημιουργείται πίνακας αληθείας ο οποίος περιλαμβάνει όλες τις απαραίτητες στήλες για τη δημιουργία των δύο μελών της ανωτέρω εξίσωσης, δηλαδή τις στήλες A, B, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}+\overline{B}$, $A \bullet B$, $\overline{A \bullet B}$.

(1)	(2)	(3)	(4)	(3) + (4)	(1) • (2)	$\overline{(1) \bullet (2)}$
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$A \bullet B$	$\overline{A \bullet B}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

Πίνακας 7.3.3.

↓ ↓

Από τον πίνακα 7.3.3. φαίνεται ότι οι η 5η και 7η στήλη είναι ακριβώς οι ίδιες, άρα πράγματι ισχύει το θεώρημα του De Morgan: $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να αποδειχθούν και τα θεωρήματα του πολλαπλασιασμού,της πρόσθεσης και του συμπληρώματος, όπως φαίνεται στον πίνακα 7.3.4.

A	$\overline{A}$	$A \bullet A$	$A + A$	$A \bullet 0$	$A \bullet 1$	$A + 0$	$A + 1$	$A \bullet \overline{A}$	$A + \overline{A}$
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1

Πίνακας 7.3.4.

7.3.4. Απλοποίηση λογικών συναρτήσεων

Μετά την απόδειξη των θεωρημάτων της άλγεβρας Boole, θεωρείται πλέον ότι αυτά ισχύουν και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη ή απλοποίηση άλλων θεωρημάτων ή λογικών εξισώσεων.

Π.χ. Να απλοποιηθεί η παράσταση $H = A \bullet (\overline{A} + B)$.

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και το θεώρημα του πολλαπλασιασμού, θα είναι :

$$H = A \bullet \overline{A} \bullet B + \overline{A} \bullet \overline{B} + A \bullet B = 0 + A \bullet B = A \bullet B.$$

Για επαλήθευση, μπορεί να γραφεί ο πίνακας αληθείας για κάθε μέλος της εξίσωσης:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}+B$	$A \bullet (\overline{A}+B)$ ↓	$A \bullet B$ ↓
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Πίνακας 7.3.5.

Παράδειγμα 7.3.2

Να απλοποιηθεί με τις σχέσεις της άλγεβρας Boole, η κάτωθι παράσταση:

$$X = A + \overline{A} \bullet B + \overline{A} \bullet \overline{B}.$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας πρώτα την επιμεριστική ιδιότητα, θα είναι :

$$X = A + \overline{A} \bullet (\overline{B} + \overline{B}).$$

Μετά, χρησιμοποιώντας την πρόσθεση ($B + B = 1$), θα είναι :

$$X = A + \overline{A} \bullet (1) = A + \overline{A} = 1 \Rightarrow \quad \boxed{X = 1}$$

Η μεταβλήτή Χ λαμβάνει την λογική τιμή "1" πάντοτε, ανεξάρτητα των τιμών των μεταβλητών Α και Β.

Παράδειγμα 7.3.3

Να απλοποιηθεί η παράσταση: $E = A \bullet B \bullet C + A \bullet B \bullet \overline{C} + \overline{A} \bullet B$

Λύση

Εφαρμόζοντας τα θεωρήματα θα είναι:

$$E = A \bullet B \bullet (C + \overline{C}) + \overline{A} \bullet B = A \bullet B + \overline{A} \bullet B = B \bullet (A + \overline{A}) = B \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{E = B}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι, όποιες τιμές λαμβάνει η μεταβλητή Β τις ίδιες έχει και η μεταβλητή Ε ανεξαρτήτως των τιμών των Α και C.

Παράδειγμα 7.3.4

Να απλοποιηθεί η παράσταση: $G = \overline{(A \bullet \overline{B})}$

Λύση

Εφαρμόζοντας το θεώρημα De Morgan για τον πολλαπλασιασμό θα είναι:

$$G = \overline{(A \bullet \overline{B})} = \overline{A} + (\overline{\overline{B}}) = \overline{A} + B$$

Παράδειγμα 7.3.5

Να απλοποιηθεί η συνάρτηση, εφαρμόζοντας τα θεωρήματα De Morgan:

$$F = (\overline{A} + A \bullet B) \bullet (\overline{A} + B)$$

Λύση

Θα ισχύουν : $F = \overline{A} \bullet \overline{A} + A \bullet B \bullet \overline{A} + \overline{A} \bullet B + A \bullet B \bullet B =$

$$= \overline{A} + 0 \qquad + \overline{A} \bullet B + A \bullet B \Rightarrow$$

$$F = \overline{A} + B \bullet (A + \overline{A}) = \overline{A} + B$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η τιμή της συνάρτησης **εξαρτάται** μόνο από το **δεύτερο παράγοντα** του γινομένου ($\overline{A} + B$) και **όχι** από τον **πρώτο.**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 7.3

- Οι **λογικές συναρτήσεις** είναι συναρτήσεις λογικών μεταβλητών και λαμβάνουν τις λογικές τιμές "0" και "1".
- Οι **βασικές πράξεις της άλγεβρας Boole** είναι η λογική πρόσθεση (Η΄,OR), ο λογικός πολλαπλασιασμός **(ΚΑΙ, AND)** και η λογική αντιστροφή ή συμπλήρωμα **(ΟΧΙ, NOT).**
- Ο **πίνακας αληθείας** μιας λογικής συνάρτησης είναι ένας πίνακας που περιέχει όλες τις δυνατές καταστάσεις μιας λογικής συνάρτησης..
- Η **απλοποίηση** των λογικών συναρτήσεων πραγματοποιείται είτε με την χρησιμοποίηση των θεωρημάτων της άλγεβρας Boole, είτε κατασκευάζοντας τον πίνακα αληθείας της λογικής συνάρτησης.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.3

7.3.1 Με την βοήθεια των πινάκων αληθείας, επαληθεύστε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

i) $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$

ii) $\overline{(A + B)} = \overline{A} \bullet \overline{B}$

7.3.2 Απλοποιήστε την παράσταση:

$F = (A \bullet B + C) \bullet A$

7.3.3 Ομοίως:

$G = \overline{A} \bullet B + A \bullet B + \overline{A} \bullet \overline{B}$

7.3.4 Ομοίως : $\overline{A \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet B}$

7.3.5 Με την βοήθεια των πινάκων αληθείας αποδείξτε αν οι παρακάτω παραστάσεις είναι ίσες :

i) $A \bullet B + \overline{A} \bullet B + \overline{A} \bullet \overline{B} = \overline{A} + B$

ii) $\overline{(\overline{A} \bullet B + \overline{B} \bullet \overline{A})} + A \bullet B =$

$= \overline{A \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet B}$

iii) $X \bullet Y \bullet Z + X \bullet Z + Y \bullet Z =$

$= X + Y + Z.$

7.4 Λογικές Πύλες

Τα ψηφιακά κυκλώματα αποτελούνται από **λογικές πύλες**, δηλαδή στοιχειώδη λογικά κυκλώματα τα οποία πραγματοποιούν τις λογικές πράξεις της άλγεβρας Boole, δηλαδή του πολλαπλασιασμού, της πρόσθεσης, και του συμπληρώματος. Οι λογικές πύλες είναι λογικά κυκλώματα με πολλές εισόδους αλλά με μία μόνο έξοδο.

7.4.1 Λογική Πύλη ΚΑΙ (AND)

Η πύλη ΚΑΙ (AND) πραγματοποιεί τη λογική πράξη του πολλαπλασιασμού δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Ονομάσθηκε **ΚΑΙ** διότι πρέπει και οι δύο μεταβλητές εισόδου της λογικής πύλης να έχουν την τιμή 1, για να έχει η έξοδος τιμή 1. Όταν η μία ή και οι δύο μεταβλητές εισόδου είναι 0, τότε η έξοδος είναι 0.

Αν οι είσοδοι της λογικής πύλης είναι δύο, συμβολιζόμενες με τα γράμματα Α και Β, και η έξοδος με το γράμμα Υ, τότε η πύλη AND συμβολίζεται με τη λογική συνάρτηση:

$$\mathbf{Y = A \bullet B} \qquad \mathbf{7.4.1}$$

Ο πίνακας αληθείας της πύλης AND δύο εισόδων είναι ο κάτωθι:

A	B	Y = A • B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Πίνακας 7.4.1. *Πίνακας αληθείας πύλης AND δύο εισόδων*

Αν οι είσοδοι είναι τρείς, Α, Β, C, και η έξοδος Υ, τότε ο πίνακας αληθείας και η λογική συνάρτηση της είναι:

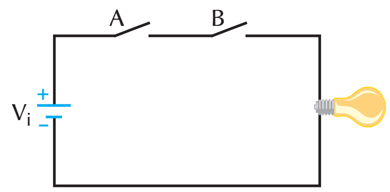
A	B	C	Y =A • B • C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Πίνακας 7.4.2. *Πύλη AND τριών εισόδων*

Το σύμβολο της πύλης AND φαίνεται στο σχήμα 7.4.1 (α) όταν έχει 2 εισόδους και στο 7.4. 1(β) όταν έχει πολλές εισόδους.

Σχήμα 7.4.1 *Σύμβολα μιας πύλης AND, (α) δύο εισόδων (β) πολλών εισόδων*

Χρησιμοποιώντας άλγεβρα διακοπτών, στο παρακάτω κύκλωμα του σχήματος 7.4.2., η λάμπα Λ θα ανάψει μόνο όταν ο διακόπτης Α και ο διακόπτης Β είναι κλειστοί.

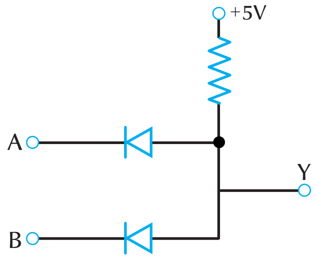


Σχήμα 7.4.2 *Εν σειρά κύκλωμα με διακόπτες*

Η πύλη AND με δύο εισόδους αποτελεί εφαρμογή των διόδων PN και μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο διόδους και μία αντίσταση όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4.3. Όταν και οι δύο είσοδοι Α και Β είναι low (γειωμένες), τότε οι δίοδοι άγουν και επειδή η πτώση τάσης στις διόδους είναι 0,7 V, η έξοδος Y θεωρείται γειωμένη (LOW). Αν μία από τις εισόδους π.χ η Α είναι LOW, τότε αυτή άγει και επομένως η έξοδος είναι Low ανεξάρτητα από το γεγονός ότι η Β είναι High και επομένως η αντίστοιχη δίοδος δεν άγει.

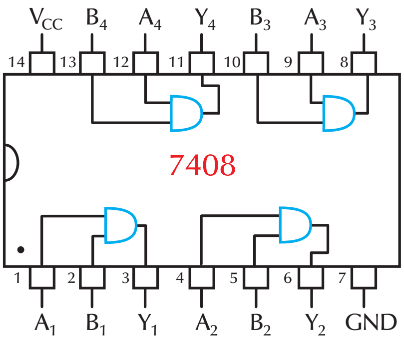
Όταν και οι δύο είσοδοι είναι High (+5V), τότε δεν άγουν, δεν υπάρχει ρεύμα στην αντίσταση, επομένως ούτε πτώση τάσης σ'αυτήν και η έξοδος Y είναι High (+5V). Με τον ίδιο τρόπο σύνδεσης των διόδων μπορούμε να υλοποιήσουμε πύλες ΚΑΙ τριών ή περισσοτέρων εισόδων συνδέοντας 3, 4,... διόδους αντίστοιχα.

Η πύλη AND υπάρχει σε ολοκληρωμένο κύκλωμα που περιέχει 4 πύλες AND, με κωδικό αριθμό 7408, το οποίο περιγράφεται σε data-sheets



Σχήμα 4.7.3 *Πύλη AND 2 εισόδων με διόδους*

εταιρειών όπως η National Semiconductor, Fairchild, Motorola κ.λ.π. και παρατίθεται στο παράρτημα. Το ολοκληρωμένο έχει 14 ακροδέκτες (1 ακροδέκτη γείωσης (GND), 1 ακροδέκτη τροφοδοσίας (V_{cc}), 4x2 =8 εισόδους, 4x 1 =4 εξόδους) (σχ. 7.4.4.)



Σχήμα 7.4.4 *Ολοκληρωμένο κύκλωμα 7408*

Παράδειγμα 7.4.1

Να υπολογισθεί η έξοδος Υ μιας πύλης AND όταν η είσοδος A=011101 και η είσοδος B =101011.

Λύση

Κάθε ψηφίο της εξόδου υπολογίζεται αν πολλαπλασιασθούν τα αντίστοιχα ψηφία των εισόδων και συνεπώς είναι:

$$Y = A \bullet B = 001001.$$

Παράδειγμα 7.4.2

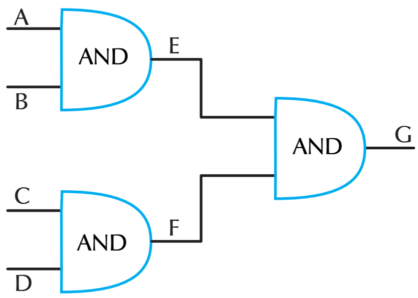
Να σχεδιασθεί το κύκλωμα που πραγματοποιεί την λογική συνάρτηση: $G = A \bullet B \bullet C \bullet D$ χρησιμοποιώντας πύλες AND δύο εισόδων

Λύση

Η ανωτέρω συνάρτηση αποτελείται από 4 εισόδους και, για να σχεδιασθεί με πύλες 2 εισόδων, θα χρησιμοποιηθούν 3 πύλες AND διότι η συνάρτηση γράφεται ως εξής:

$$G = (A \bullet B) \bullet (C \bullet D) = E \bullet F$$

Η 1^{η} πύλη AND πραγματοποιεί την συνάρτηση $E = A \bullet B$.
Η 2^{η} πύλη AND πραγματοποιεί την συνάρτηση $F = C \bullet D$ και
Η 3^{η} πύλη AND πραγματοποιεί την συνάρτηση $G = E \bullet F$.
Η σχεδίαση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 7.4.5.



Σχήμα 7.4.5 Κύκλωμα παραδείγματος

7.4.2. ΛΟΓΙΚΗ ΠΥΛΗ OR (Η')

Η πύλη **OR** (Η') πραγματοποιεί την λογική πρόσθεση και εκφράζεται από την λογική συνάρτηση :

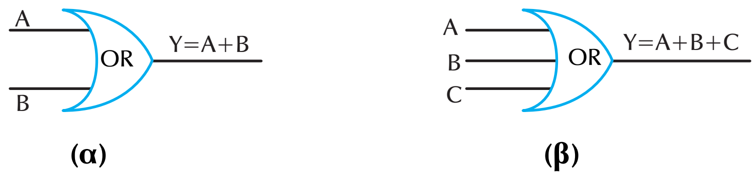
$$Y = A + B \qquad 7.4.2$$

Ονομάζεται πύλη OR (Η') γιατί η έξοδος Y είναι "1" (High), όταν η Είσοδος A είναι "1" (High) **Η'** η είσοδος B είναι "1" (High). Ο πίνακας αληθείας της πύλης OR δίνεται παρακάτω:

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

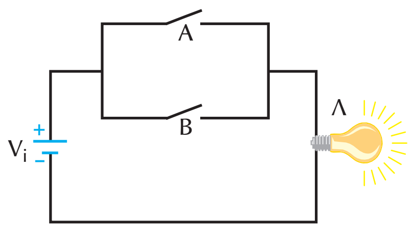
Πίνακας 7.4.3. Πίνακας αληθείας πύλης OR

Το σύμβολο (+) είναι χαρακτηριστικό της πύλης OR στην άλγεβρα Boole. Στο σχήμα 7.4.6.(α) φαίνεται πύλη OR 2 εισόδων, ενώ στο σχήμα 7.4.6 (β) πύλη 3 εισόδων:



Σχήμα 7.4.6 *Συμβολισμός πύλης OR (α) δύο εισόδων, (β) τριών εισόδων*

Η Πύλη OR ισοδυναμεί, στην άλγεβρα διακοπτών, με διακόπτες εν παραλλήλω όπου στο κύκλωμα η έξοδος είναι High, δηλαδή ανάβει το L.E.D. εάν ένας ή περισσότεροι διακόπτες είναι κλειστοί (Σχήμα 7.4.7)



Σχήμα 7.4.7 *Διακόπτες εν παραλλήλω*

Παράδειγμα 7.4.4

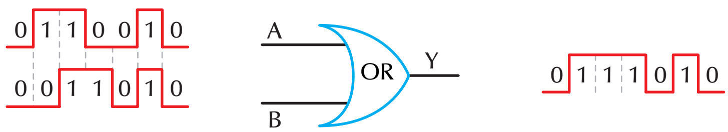
Να υπολογισθεί η έξοδος μιας πύλης OR δύο εισόδων, όταν
A = 0110010 και B =0011010.

Λύση

Η έξοδος Y της πύλης OR είναι :

$$Y = 0111010$$

Τα αντίστοιχα χρονικά διαγράμματα των μεταβλητών εισόδου και εξόδου φαίνονται στο σχήμα 7.4.8



Σχήμα 7.4.8 *Χρονικά διαγράμματα μεταβλητών*

Παράδειγμα 7.4.5

Να πραγματοποιηθεί με πύλες η συνάρτηση

$$Y = (A+B) \bullet C$$

Λύση

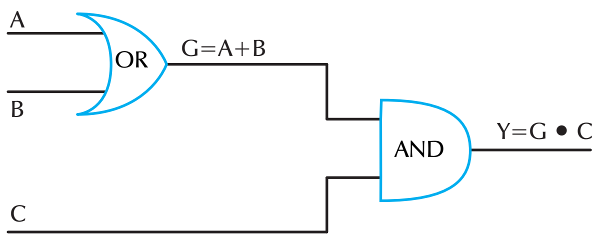
Η λογική συνάρτηση αποτελείται από 3 μεταβλητές οι οποίες συνδέονται με 2 λογικές πράξεις. Πραγματοποιούμε πρώτα την **λογική πρόσθεση** μεταξύ των μεταβλητών A και B με μία πύλη OR:

$$G = A + B$$

Κατόπιν πραγματοποιούμε τον **λογικό πολλαπλασιασμό** μεταξύ των μεταβλητών G και C, με μία πύλη AND :

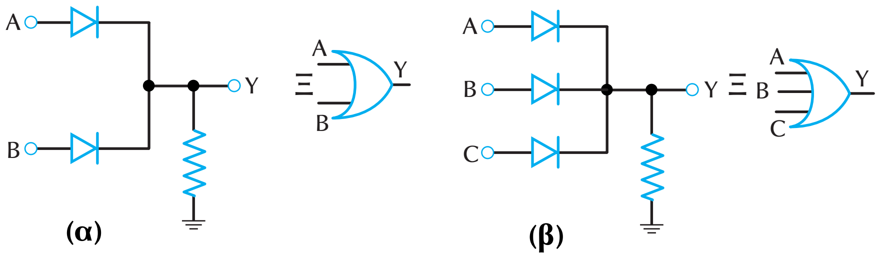
$$Y = G \bullet C$$

Η σχεδίαση του κυκλώματος φαίνεται στο σχήμα 7.4.9



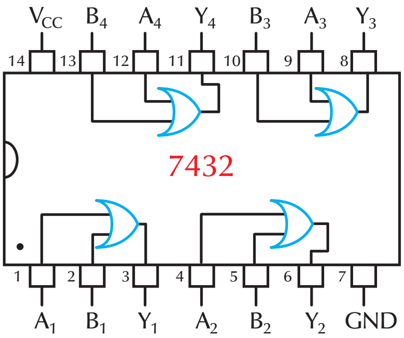
Σχήμα 7.4.9 *Κύκλωμα παραδείγματος*

Η πύλη OR μπορεί να κατασκευασθεί με διόδους, όπως και η πύλη AND, συνδεδεμένες όπως στο σχήμα 7.4.10, όπου η αντίσταση του κυκλώματος συνδέεται μεταξύ της εξόδου Y και της γής (pull down resistor). Είναι εύκολο να διαπιστωθεί η λειτουργία της πύλης, όπου η έξοδος είναι High εάν μία από τις εισόδους **ή** και οι δύο είναι High.



Σχήμα 7.4.10 *Πύλη OR με διόδους (α) 2 είσοδοι. (β) 3 είσοδοι*

Η πύλη OR κατασκευάζεται υπό μορφή ολοκληρωμένου κυκλώματος (IC), του 7432, το οποίο περιέχει 4 OR πύλες 2 εισόδων.(Quad -2 input OR Gates) και φαίνεται στο σχήμα 7.4.11.



Σχήμα 7.4.11
Ολοκληρωμένο κύκλωμα 7432

Παράδειγμα 7.4.6

Να σχεδιασθεί κύκλωμα που να υλοποιεί την συνάρτηση:

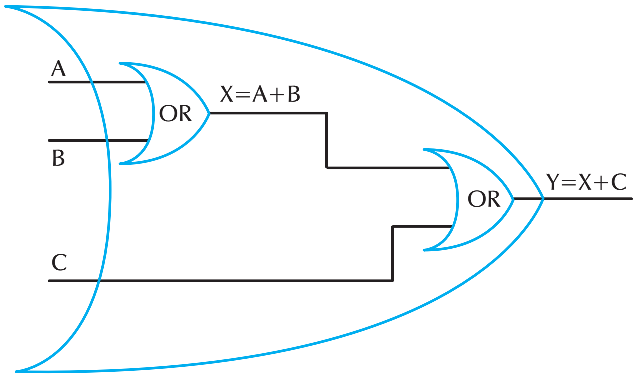
$$Y = A + B + C$$

με πύλες 2 εισόδων.

Λύση

Η συνάρτηση γράφεται: Y =A + B + C = (A + B) + C = X + C

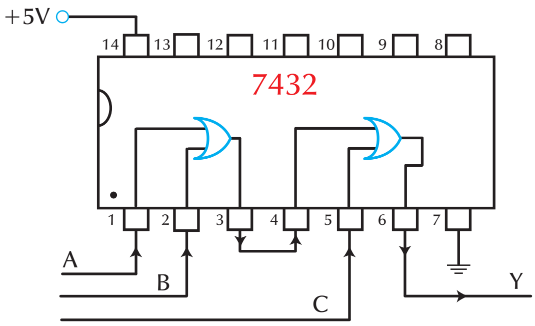
Συνεπώς η λογική συνάρτηση Y υλοποιείται με 2 πύλες OR 2 εισόδων. Η πρώτη υλοποιεί την συνάρτηση X = A + B και η δεύτερη την συνάρτηση Y = X +C όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4.12.



Σχήμα 7.4.12 *Σχεδίαση λογικής συνάτησης Y = A + B + C*

Η παραπάνω λογική συνάρτηση είναι πύλη OR τριών εισόδων.

Η ενσυρμάτωση του πιο πάνω κυκλώματος, χρησιμοποιώντας το Ο.Κ. 7432, φαίνεται στο σχήμα 7.4.13. με τις απαραίτητες συνδέσεις.



Σχήμα 7.4.13

Παράδειγμα 7.4.7

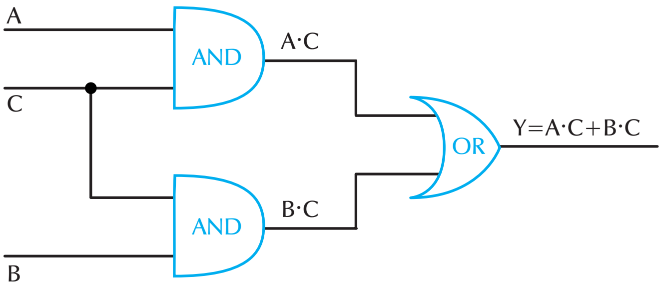
Να σχεδιασθεί η λογική συνάρτηση του παραδείγματος 7.4.5 με δεύτερο τρόπο, χρησιμοποιώντας πύλες AND και OR.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα θα έχουμε :

$$Y = (A + B) \bullet C = A \bullet C + B \bullet C$$

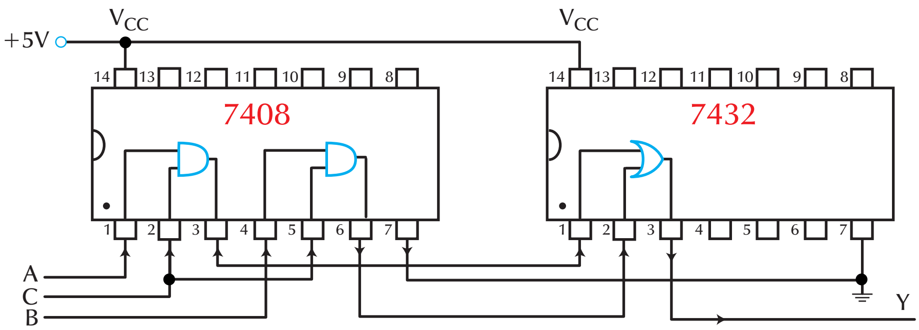
Το δεύτερο μέλος της λογικής συνάρτησης σχεδιάζεται χρησιμοποιώντας 1 πύλη OR και 2 πύλες AND, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4.14.



Σχήμα 7.4.14 *Κύκλωμα παραδείγματος*

Κατασκευαστικά το κύκλωμα του σχήματος 7.4.9. είναι απλούστερο διότι χρησιμοποιεί 1 πύλη OR και 1 πύλη AND, δηλαδή μία πύλη λιγότερη από αυτό του σχήματος 7.4.14.

Η ενσυρμάτωση είναι η ακόλουθη:



Σχήμα 7.4.15 *Κατασκευή κυκλώματος παραδείγματος*

7.4.5 ΛΟΓΙΚΗ ΠΥΛΗ NOT (ΟΧΙ)

Η λογική πύλη **NOT** (**ΟΧΙ**) πραγματοποιεί την ομώνυμη πράξη που έχει λογική συνάρτηση

$$Y = \bar{A} \qquad 7.4.3.$$

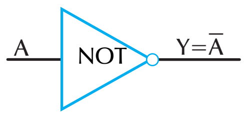
και δηλώνει ότι η έξοδος είναι **αντίθετη** ή **συμπλήρωμα** της εισόδου. Ο πίνακας αληθείας είναι ο ακόλουθος:

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

Πίνακας 7.4.4. *Πίνακας αληθείας NOT*

Δηλαδή όταν η είσοδος είναι λογικό 1 (HIGH) η έξοδος είναι λογικό 0 (LOW) και όταν η είσοδος είναι λογικό 0 (LOW) η έξοδος είναι λογικό 1 (High). Η πύλη NOT καλείται και **αναστροφέας (inverter).**

Η λογική πράξη ΟΧΙ συμβολίζεται με ένα τρίγωνο που στην κορυφή του έχει ένα μικρό κύκλο όπως στο σχήμα 7.4.16.

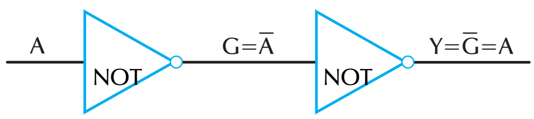


Σχήμα 7.4.16 *Συμβολισμός πύλης NOT*

Η πύλη NOT (ΟΧΙ), αντίθετα με τις άλλες λογικές πύλες, έχει μόνο μία είσοδο και μία έξοδο.

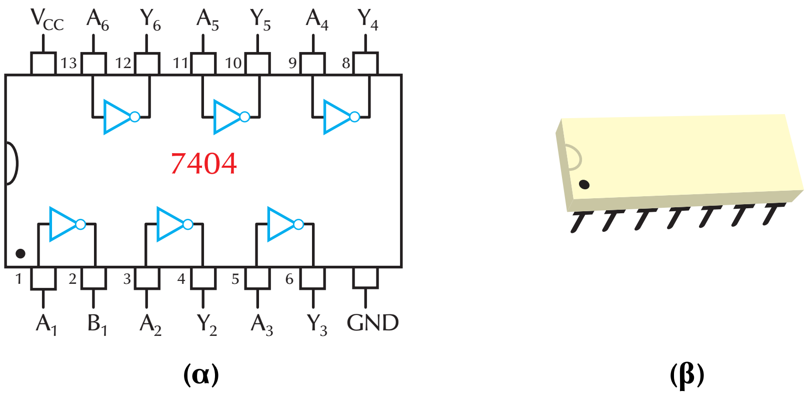
Αν συνδέσουμε εν σειρά 2 αναστροφείς, τότε η έξοδος θα είναι η ίδια με την είσοδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4.17. Η λογική συνάρτηση της εξόδου θα είναι :

$$Y = \overline{G} + \overline{\overline{A}} = A \qquad 7.4.4$$



Σχήμα 7.4.17 *Διπλή αναστροφή*

Η πύλη NOT κατασκευάζεται υπό μορφή ολοκληρωμένου κυκλώματος (Ο.Κ.), το οποίο περιέχει 6 πύλες NOT (Invertres). Έχει την κωδική ονομασία 5404 ή 74 04 ανάλογα την θερμοκρασία με 14 ακροδέκτες (-pins) : 6 είσοδοι, 6 έξοδοι, 1 τροφοδοσία ($V_{cc} = +5$ V) και 1 γείωση (Gnd). Το Ο.Κ. 7404 φαίνεται σχηματικά διάγραμμα στο σχήμα 7.4.18 (α) και σε πραγματική μορφή στο σχήμα 7.4.18 (β).



Σχήμα 7.4.18 *Ολοκληρωμένο κύκλωμα αναστροφέων (7404).*
(α).Διάγραμμα. (β) Πραγματικό Ο.Κ.

Χρησιμοποιώντας τις λογικές πύλες OR, AND, NOT, είναι δυνατόν να υλοποιηθεί οποιαδήποτε λογική συνάρτηση και ακολούθως να κατασκευασθεί το ανάλογο λογικό κύκλωμα, ακολουθώντας τους κάτωθι κανόνες:

i) Πρώτα δημιουργούμε τα συμπληρώματα των μεταβλητών χρησιμοποιώντας πύλες NOT
ii) Μετά υλοποιούμε τους λογικούς πολλαπλασιασμούς με πύλες AND.
iii) Ακολούθως υλοποιούμε τις λογικές προσθέσεις με πύλες OR.

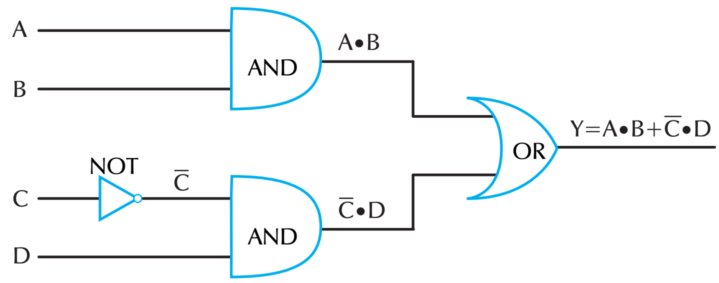
Παράδειγμα 7.4.8

Να σχεδιασθεί η λογική συνάρτηση : $Y = A \bullet B + \overline{C} \bullet D$ χρησιμοποιώντας συνδυασμούς από πύλες AND, NOT, OR.

Λύση

Η λογική συνάρτηση Y προκύπτει από λογική πρόσθεση 2 παραγόντων, οι οποίοι προέρχονται από λογικούς πολλαπλασιασμούς των μεταβλητών εισόδου της συνάρτησης και μία μεταβλητή είναι ανεστραμένη.

Συνεπώς η λογική συνάρτηση υλοποιείται με 2 πύλες AND, μία πύλη OR και μία πύλη NOT, όπως στο σχήμα 7.4.19.



Σχήμα 7.4.19 *Σχεδίαση λογικής συνάτησης Y = A + B + C*

Παράδειγμα 7.4.9

Δίνεται η λογική συνάρτηση : $F = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet C + A \bullet \overline{C} \bullet D$

Να σχεδιασθεί το κύκλωμα που την υλοποιεί, χρησιμοποιώντας λογικές πύλες AND, NOT, OR.

Λύση

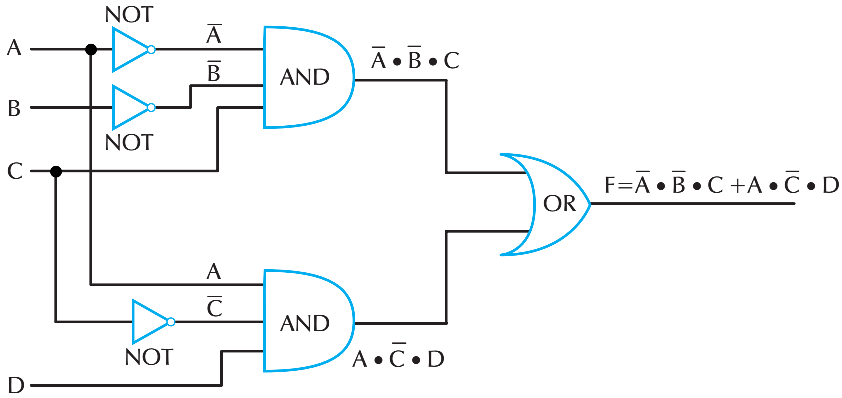
Αναλύοντας την λογική συνάρτηση F, παρατηρούμε ότι για να σχεδιασθεί το κύκλωμα :

i) Απαιτούνται 3 αναστροφείς για τα συμπληρώματα των μεταβλητών B, A, C.

ii) Απαιτούνται 2 λογικές πύλες AND 3 εισόδων για τα γινόμενα A •B•C και A•C•D

iii) Χρειάζεται 1 πύλη OR για την λογική πρόσθεση (+) των δύο παραγόντων.

Ακολουθώντας τα 3 ανωτέρω βήματα,προκύπτει το κύκλωμα του σχήματος 7.4.20

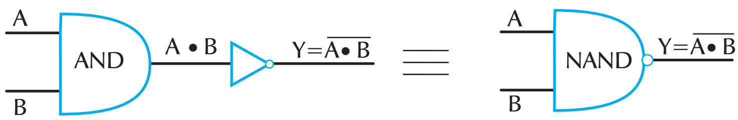


Σχήμα 7.4.20 *Λογικό κύκλωμα του παραδείγματος 7.4.9.*

7.4.4. Λογική Πύλη NAND (NOT AND)

Στις προηγούμενες παραγράφους επεξηγήσαμε τις πύλες AND, OR, NOT που είναι οι βασικές πύλες που δημιουργούν όλα τα ψηφιακά κυκλώματα. Μία τέταρτη χρήσιμη πύλη είναι η πύλη NAND η οποία είναι το συμπλήρωμα της λογικής πύλης AND.

Αυτή δημιουργείται εάν συνδέσουμε σε σειρά μία πύλη AND και μία πύλη NOT και συμβολίζεται όπως η πύλη AND με ένα κύκλο στο άκρο της που δηλώνει την άρνηση.



Σχήμα 7.4.21 Συμβολισμός πύλης NAND

Ο πίνακας αληθείας της λογικής πύλης NAND φαίνεται στον πίνακα 7.4.4. και η λογική συνάρτηση είναι:

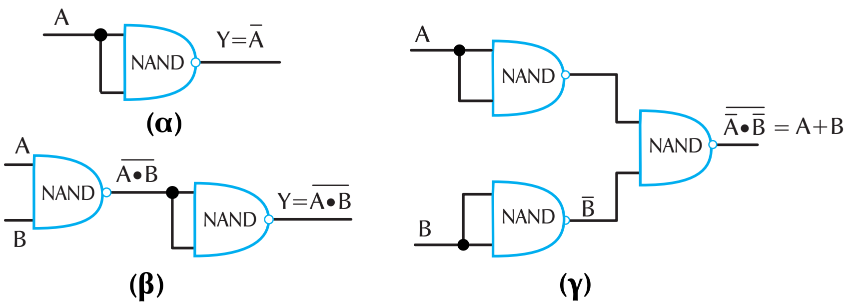
$$Y = \overline{A \cdot B} \qquad 7.4.5$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πίνακας 7.4.4. Πίνακας αληθείας πύλης NAND

Η πύλη NAND είναι πολύ εύχρηστη και μπορούμε να κατασκευάσουμε τις πύλες AND, OR, NOT χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND. Για τον λόγο αυτό η πύλη NAND λέγεται **πύλη γενικής χρήσης** ή **παγκόσμια πύλη.**

Στα παρακάτω σχήματα 7.4.22. (α), (β), (γ) δίνονται οι αντιστοιχίες των πυλών NOT, AND, OR με συνδιασμούς πυλών NAND.



Σχήμα 7.4.22 *Υλοποίηση λογικών πυλών μόνο με NAND*

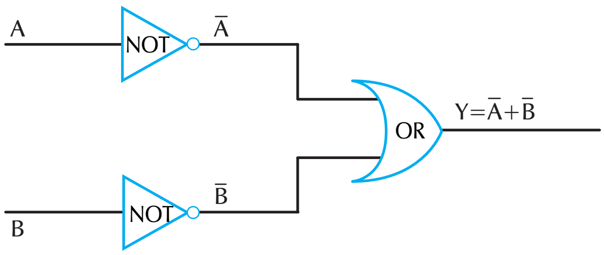
Κατά τον αντίστροφο τρόπο, μπορεί να υλοποιηθεί η λογική πύλη NAND με διάφορους συνδυασμούς των πυλών AND, OR, NOT.

Κατασκευή πύλης NAND από πύλες NOT και OR.

Η λογική συνάρτηση της πύλης NAND μπορεί να αναλυθεί με τον ακόλουθο τρόπο, άν χρησιμοποιηθεί ο νόμος του De Morgan:

$$Y = \overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

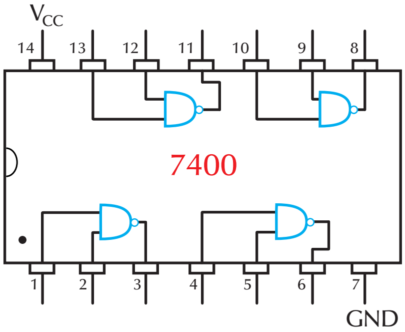
Επομένως η λογική πύλη NAND μπορεί να κατασκευασθεί χρησιμοποιώντας 2 πύλες NOT και μια πύλη OR, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4.23.



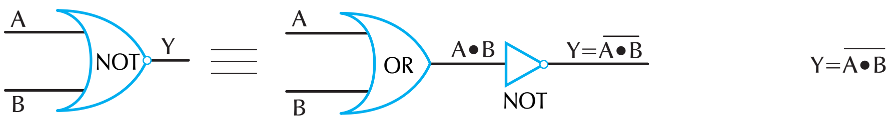
Σχήμα 7.4.23 *Υλοποίηση λογικής πύλης NAND*

7.4.5 Η λογική πύλη NOR (NOT OR)

Η λογική πύλη NOR είναι συνδυασμός της πύλης OR και της πύλης NOT. Το σύμβολο της είναι το ίδιο με αυτό της πύλης OR αλλά προστίθεται ένας μικρός κύκλος που δηλώνει την άρνηση.Το σύμβολο της και η λογική συνάρτηση φαίνονται στο σχήμα :



Σχήμα 7.4.25 Το ολοκληρωμένο 7400 (NAND)



(α) **(β)**

Σχήμα 7.4.24 Λογική πύλη NOR (α) Σύμβολο, (β) Λογική συνάρτηση

Ο πίνακας αληθείας της πύλης NOR είναι ο ακόλουθος (Σημειώνεται και η πύλη OR για σύγκριση):

A	B	OR	NOR
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

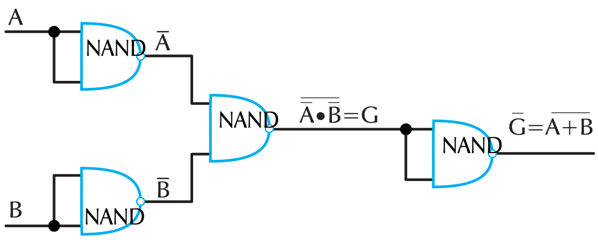
Πίνακας 7.4.5

Η έξοδος της λογικής πύλης NOR είναι HIGH μόνο όταν όλες οι είσοδοι της είναι LOW.

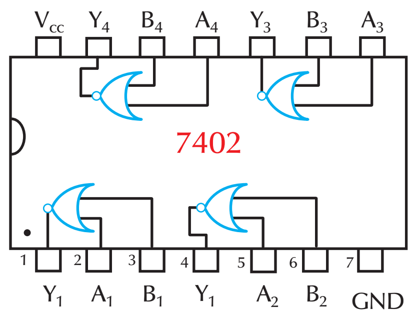
Η πύλη NOR μπορεί να παρασταθεί μόνο με πύλες NAND ως ακολούθως:

Η υλοποίηση αυτή προκύπτει με βάση την άλγεβρα Boole, άν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του De Morgan:

$$Y = \overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$



Σχήμα 7.4.26



Σχήμα 7.4.27 Ολοκληρωμένο κύκλωμα 7402(NOR)

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι θα χρησιμοποιήσουμε 4 λογικές πύλες NAND, ήτοι δύο με βραχυκυκλωμένες εισόδους για τα συμπληρώματα των εισόδων Α και Β, μία για την συνάρτηση G = A+B και μία για το συμπλήρωμα της G.

Η πύλη NOR κατασκευάζεται υπό μορφή ολοκληρωμένου κυκλώματος με 14 ακροδέκτες. Είναι το Ο.Κ. 7402 και έχει 4 πύλες NOR, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4.27.

Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Η 7.4

- Η **πύλη AND (ΚΑΙ)** δύο εισόδων είναι HIGH (λογικό 1) **τότε και μόνο τότε όταν** ΚΑΙ οι δύο είσοδοι της είναι HIGH (λογικό 1).

- Η **πύλη OR (Η΄)** δύο εισόδων είναι HIGH (λογικό 1) όταν η μία είσοδος **Η΄** η άλλη είσοδος **Η΄** και οι δύο μαζί είναι HIGH.

- Η **πύλη NOT (ΟΧΙ)** δίνει έξοδο το συμπλήρωμα της εισόδου

- Η **πύλη NAND** είναι το συμπλήρωμα της πύλης AND και ο πίνακας αλήθείας είναι αντίστροφος αυτού της πύλης AND.

- Η **πύλη NOR** είναι το συμπλήρωμα της πύλης OR και ο πίνακας αληθείας είναι ο αντίστροφος.

- Κάθε λογική πύλη μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες NAND. Έτσι η πύλη αυτή καλείται **πύλη γενικής χρήσης.**

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 7

7.5.1 Να σχεδιασθεί ένα λογικό κύκλωμα το οποίο να δίνει ως έξοδο λογικό "1", όταν οποιεσδήποτε από τις τρείς εισόδους του κυκλώματος έχουν τιμή λογικό "1".

7.5.2. Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole, να απλοποιηθούν οι πιο κάτω συναρτήσεις:

i. $H = (\overline{A} + AB) \bullet (\overline{A} + B)$

ii. $F = A \bullet B + \overline{C} \bullet A + \overline{B} \bullet C$

iii. $J = A \bullet B + A \bullet \overline{B}$

7.5.3 Να σχεδιασθεί λογικό κύκλωμα το οποίο να δίνει έξοδο μόνο όταν είναι HIGH μία ή δύο είσοδοι από τις τέσσερεις.

7.5.4 Σχεδιάστε λογικό κύκλωμα που να παριστάνει την συνάρτηση:

$F = A \bullet \overline{B} \bullet C + A \bullet B$

7.5.5. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω σχέση, χρησιμοποιώντας τον πίνακα αληθείας:

$(X + Y) \bullet (X + \overline{Y}) = X$

7.5.6 Δίνεται ο κάτωθι πίνακας αληθείας μιας λογικής συνάρτησης F.

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Να γραφτεί η λογική συνάρτηση, χρησιμοποιώντας τις λογικές μεταβλητές X,Y,Z.

7.5.7 Σε ψηφιακό Ο.Κ., σε κάποια είσοδο μετράμε τάση 2,5 V. Η τάση αυτή είναι λογικό "1" και γιατί;

7.5.8 Να γραφτεί η έκφραση Boole μιας πύλης OR 5 εισόδων.

7.5.9 Κατασκευάστε το λογικό κύκλωμα για την πραγματοποίηση της συνάρτησης

$G = A + \overline{B} \bullet C$

χρησιμοποιώντας πύλες NAND. Δώστε το λογικό διάγραμμα του κυκλώματος σας και συμπληρώστε τον πιο κάτω πίνακα αληθείας.

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{B}\cdot C$	F
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

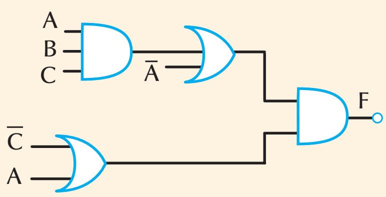
7.5.10 Αν έχετε 4 πύλες AND δύο εισόδων, σχεδιάστε μια πύλη AND 5 εισόδων.

7.5.11 Ποια λογική πύλη μπορεί να ονομασθεί "μερικά ή όλα";

7.5.12 Η πλευρά της εξόδου στο κύκλωμα της πύλης AND είναι .... (ευθεία, κυκλική, τρίγωνο, μυτερή)

7.5.13 Να γραφτεί αν τα κάτωθι ολοκληρωμένα κυκλώματα διαφέρουν και πώς, ως προς τις λογικές συναρτήσεις στους ακροδέκτες τους: 7400, 7408, 7432 και 7404.

7.5.14 Γράψτε και απλοποιήστε την αλγεβρική έκφραση Boole για το λογικό διάγραμμα του σχ.



7.5.15 Να σχεδιασθούν τα λογικά διαγράμματα των παραστάσεων χωρίς να γίνει απλοποίηση αυτών :

i) $(\overline{A}\cdot\overline{B}+C\cdot D)\cdot(A\cdot B+D)$

ii) $\overline{(A\cdot B+C)}\cdot(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})$

7.5.16 Σχεδιάστε λογικά διαγράμματα για την υλοποίηση των λογικών παραστάσεων, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND.

i) $F = A\cdot B\cdot C$

ii) $G = A + B + C$

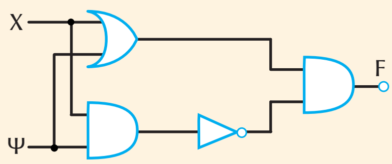
7.5.17 Σχεδιάστε λογικά διαγράμματα για την υλοποίηση των παρακάτω λογικών παραστάσεων, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOR:

i) $F = A + B + C$

ii) $F = (A + \overline{B})\cdot(C + D)$

(Υπόδειξη: Πάρτε 2 φορές το συμπλήρωμα της παράστασης.)

7.5.18 Βρείτε την αλγεβρική έκφραση Boole του παρακάτω διαγράμματος :



7.5.19 Με την βοήθεια των απαραίτητων πυλών σχεδιάστε κύκλωμα που να υλοποιεί την συνάρτηση:

$$G = X \bullet Y \bullet Z + X \bullet \overline{Y} \bullet \overline{Z} + \overline{X} \bullet \overline{Y} \bullet Z$$

7.4.20 Να αποδειχθεί η σχέση :

$$\overline{A} + A \bullet B = \overline{A} + B$$

7.4.21 Να κατασκευασθεί μόνο με πύλες NAND η λογική συνάρτηση:

$$F = X \bullet Y + \overline{X} \bullet \overline{Y}$$