



Φυλλάδιο 4: Κατανομές Δειγματοληψίας και Σημειακή Εκτιμητική

Ασκήσεις Στατιστικής II

31. Από πληθυσμό που ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

λαμβάνουμε τυχαία δείγματα μεγέθους $n = 50$. Να εκτιμηθούν οι πιθανότητες $P(\bar{X} > 2)$ και $P(\bar{X} < 2.4)$.
Δίνεται ότι $G(2) = 0.9772$.

32. Από δύο ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς $X \sim N(3, 14)$ και $Y \sim N(4, 12)$ λαμβάνουμε τυχαία δείγματα μεγέθους $n_X = 5$ και $n_Y = 10$, αντίστοιχα. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(\bar{X} > \bar{Y})$ και $P(|\bar{X} - \bar{Y}| < 1)$.
Δίνεται ότι $G(0.5) = 0.6915$ και $G(1) = 0.8413$.

33. Ένας ανθρωπολόγος μελετά το ύψος των ανδρών μιας φυλής και χρησιμοποιεί τον αριθμητικό μέσο ενός τυχαίου δείγματος 25 ανδρών για να εκτιμήσει το πραγματικό μέσο ύψος τους. Αν η κατανομή του ύψους των ανδρών αυτών είναι κανονική με διακύμανση $\sigma^2 = 36$, ποια είναι η πιθανότητα όπως η εκτίμηση αυτή παρουσιάζει σφάλμα το πολύ 2 εκατοστών;
Δίνεται ότι $G(5/3) = 0.9522$.

34. Αν οι μισθοί X ενός κλάδου εργαζομένων ακολουθούν κανονική κατανομή με άγνωστο μέσο μ και τυπική απόκλιση $\sigma = 5000$ ευρώ και $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ είναι τυχαίο δείγμα από τους μισθούς αυτούς, ποιο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος n ώστε με πιθανότητα 99% ο δειγματικός μέσος $\bar{X}_n$ να αποκλίνει από το μέσο μ του πληθυσμού το πολύ 1000 ευρώ;
Δίνεται ότι $G(2.5758) = 0.995$ ή ισοδύναμα ότι $z_{0.005} = 2.5758$.

35. Για τον υπολογισμό της μέσης διάρκειας ζωής αυτών που πάσχουν από κάποια βαριά ασθένεια, λαμβάνεται ένα τυχαίο δείγμα από διαθέσιμα στοιχεία μεγάλων νοσοκομείων. Από παλαιότερες έρευνες είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της διάρκειας ζωής των ασθενών αυτών είναι 10 χρόνια. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το λαμβανόμενο δείγμα ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95%, ο δειγματικός μέσος να διαφέρει από τον άγνωστο μέσο του πληθυσμού όχι περισσότερο από 2 χρόνια;
Δίνεται ότι $G(1.96) = 0.975$ ή ισοδύναμα ότι $z_{0.025} = 1.96$.

36. Έστω ότι οι βαθμοί των φοιτητών στη Στατιστική ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(6.5, 4)$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες όπως:

(α). Ο βαθμός ενός οποιουδήποτε φοιτητή να είναι από 9 και πάνω.

(β). Ο μέσος όρος των βαθμών 25 φοιτητών, που διαλέγονται στην τύχη, να είναι μεταξύ 6 και 7.

(γ). Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το δείγμα των φοιτητών, έτσι ώστε η πιθανότητα στο ερώτημα (β) να είναι τουλάχιστον 95%;

Δίνεται ότι $G(0.75) = 0.7734$, $G(1) = 0.8413$, $G(1.25) = 0.8944$ και $G(1.96) = 0.975$ ή ισοδύναμα ότι $z_{0.025} = 1.96$.

37. Αν οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y ακολουθούν την κατανομή $N(0, 4)$, να βρεθεί η πιθανότητα όπως η τ.μ. $Z = \frac{X^2 + Y^2}{4}$ λάβει τιμή μικρότερη του 4.6.

Δίνεται ότι $\chi^2_{2,0.10} = 4.6$.

38. Αν η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με $\alpha = 8$ και $\beta = 2$, να βρεθεί η πιθανότητα όπως πάρει τιμή μεγαλύτερη του 32.

Δίνεται ότι $\chi^2_{16,0.01} = 32$.

39. Αν η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με $\alpha = 16$ και $\beta = 2$, να εκτιμηθεί η πιθανότητα $P(24 < X < 48)$.

Δίνεται ότι $G(1) = 0.8413$ και $G(2) = 0.9772$.

40. Αν ο πληθυσμός X ακολουθεί κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ_1^2 και ο ανεξάρτητος αυτού πληθυσμός Y ακολουθεί άλλη κατανομή με την ίδια μέση τιμή μ και διακύμανση σ_2^2 , να αποδειχθεί ότι κάθε στατιστική $Z = \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) \bar{Y}$, $\alpha \in [0, 1]$, είναι αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του κοινού μέσου μ των δύο πληθυσμών. Στη συνέχεια να βρεθεί από την οικογένεια των εκτιμητριών Z εκείνη που είναι περισσότερο αποτελεσματική.

41. Από τον πληθυσμό X που ακολουθεί κατανομή με σ.π.π.:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}, & 0 < x < 1, \alpha > 0 \\ 0, & x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1 \end{cases}$$

λαμβάνουμε τυχαίο δείγμα $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Να βρεθεί η εκτιμήτρια της παραμέτρου α :

(α). Με τη μέθοδο των ροπών.

(β). Με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

42. Από πληθυσμό που ακολουθεί κατανομή με σ.π.π.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \theta > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

λαμβάνουμε τυχαίο δείγμα $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ .