



Φυλλάδιο 3: Κανονική Κατανομή και άλλες Συνεχείς Κατανομές

Ασκήσεις Στατιστικής II

17. Αν η τ.μ. Z ακολουθεί την $N(0, 1)$, να βρεθεί η τιμή της σταθεράς α ώστε να ισχύει:

$$P(Z > \alpha) = 2P(Z < \alpha).$$

Δίνεται ότι $G(0.4307) = \frac{2}{3}$.

18. Αν η τ.μ. X ακολουθεί την $N(4, 16)$, να βρεθεί η τιμή της σταθεράς β ώστε να ισχύει:

$$1 + P(X > \beta) = 3P(X \leq \beta).$$

19. Από το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$ και διακύμανση $\sigma^2 = 9$, λαμβάνονται τυχαία δύο τιμές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα όπως καμία από τις τιμές αυτές βρίσκεται στο διάστημα $[2, 8]$.

Δίνεται ότι $G(1) = 0.8413$.

20. Από το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 7$ και διακύμανση $\sigma^2 = 9$, λαμβάνονται τυχαία τρεις τιμές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα όπως μια μόνο από τις τιμές αυτές είναι μεγαλύτερη του 10.

Δίνεται ότι $G(1) = 0.8413$.

21. Από το σύνολο των τιμών της τ.μ. X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-2, 2]$, λαμβάνονται τυχαία δύο τιμές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα όπως τουλάχιστον μια από τις τιμές αυτές βρίσκεται στο διάστημα $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

22. Γνωρίζουμε ότι η διάρκεια σε λεπτά των αστικών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων (σε λεπτά της ώρας) ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.5$. Να βρεθεί η α.σ.κ.π. της εκθετικής αυτής κατανομής και με βάση αυτή να υπολογιστούν οι πιθανότητες όπως η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης είναι:

(α). μικρότερη του ενός λεπτού

(β). μεγαλύτερη από δύο λεπτά

(γ). μεταξύ ενός και τριών λεπτών.

Δίνεται ότι $e^{-0.5} = 0.6065$.

23. Γνωρίζουμε ότι η διάρκεια λειτουργίας (σε χιλιάδες ώρες) των ηλεκτρονικών συσκευών ορισμένου τύπου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{10}$.

Να αποδειχθεί ότι η μέση διάρκεια λειτουργίας των συσκευών αυτών είναι 10 χιλιάδες ώρες.

[Υπόδειξη: Σε κάποια φάση των υπολογισμών, θα χρειαστεί εφαρμογή του κανόνα ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και του κανόνα de L'Hospital.]

24. Δίνεται ότι το μέγιστο ασφαλές βάρος, το οποίο μπορεί να μεταφέρει ένας ανελκυστήρας είναι 630 κιλά. Υποθέτουμε ότι το βάρος των ατόμων, που χρησιμοποιούν τον ανελκυστήρα, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 75 κιλά και τυπική απόκλιση 15 κιλά. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε το ολικό βάρος εννέα ατόμων, που χρησιμοποιούν ταυτόχρονα τον ανελκυστήρα αυτό, υπερβαίνει το μέγιστο ασφαλές βάρος.

Δίνεται ότι $G(1) = 0.8413$.

25. Από ένα πληθυσμό, που αποτελείται κατά 50% από άνδρες και κατά 50% από γυναίκες, λαμβάνουμε ένα τυχαίο δείγμα 100 ατόμων. Να εκτιμηθούν πιθανότητες όπως:

(α). Τουλάχιστον 60 από αυτά είναι άνδρες. Δίνεται ότι $G(1, 9) = 0.9713$.

(β). Το πολύ 55 από αυτά είναι γυναίκες. Δίνεται ότι $G(1, 1) = 0.8643$.

26. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει σ.π.π.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0, \theta > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(α). Να αποδειχθεί ότι η $f(x)$ είναι σ.π.π. για κάθε $\theta > 0$.

(β). Να βρεθούν η α.σ.κ..π. $F(x)$ και η πιθανότητα $P(X > 1)$.

27. Για την ομοιόμορφη ή ορθογωνική κατανομή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ να αποδειχθεί ότι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & x > \beta \end{cases}, \quad E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

28. Με την βοήθεια της συνάρτησης Γάμμα: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ και των ιδιοτήτων της: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, $\alpha \in R$ και $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in N$, να αποδειχθεί ότι για την κατανομή με σ.π.π.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0, \alpha, \beta > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ισχύουν ότι $E(X) = \alpha\beta$ και $Var(X) = \alpha\beta^2$.

29. Για την εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

να αποδειχθεί ότι ανήκει στην οικογένεια των κατανομών Γάμμα και άρα ισχύει ότι $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ και $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Να αποδειχθεί επίσης ότι:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

30. Με την βοήθεια των ιδιοτήτων της συνάρτησης Γάμμα να αποδειχθεί ότι για την κατανομή Λαπλασε με σ.π.π.

$$f(x) = 0.5 \cdot e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

πληροί της ιδιότητες μιας σ.π.π. καθώς επίσης και ότι $E(X) = 0$ και $Var(X) = 2$.