B3.2: ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

3.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ο πίνακας των αόριστων ολοκληρωμάτων, που δώσαμε παραπάνω, δεν είναι αρκετός για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μίας οποιασδήποτε συνάρτησης, όπως π.χ. τα ολοκληρώματα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ και $\int xe^x\,dx$. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο υπολογισμός γίνεται απλούστερος με τη βοήθεια των παρακάτω μεθόδων ολοκλήρωσης.

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

που είναι συνέπεια του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε ένα διάστημα Δ.

Πράγματι, για κάθε x ϵ Δ, έχουμε

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

οπότε

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Επομένως

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + c - \int f'(x)g(x)dx. \qquad (1)$$

Επειδή το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (1) περιέχει μια σταθερά ολοκλήρωσης, το c μπορεί να παραλειφθεί, οπότε έχουμε τον παραπάνω τύπο. ■

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπολογίζεται ευκολότερα. Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int xe^x\,dx$. Έχουμε :

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c\,.$$

Αν, τώρα, δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, αλλάζοντας τους ρόλους των x και e^x, βρίσκουμε

$$\int xe^x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx\,.$$

Το τελευταίο, όμως, ολοκλήρωμα είναι πιο σύνθετο από το αρχικό.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2e^x\,dx$ **ii)** $\int x\eta\mu 2x\,dx$

iii) $\int (4x^3+1)\ln x\,dx$ **iv)** $\int e^x\eta\mu 2x\,dx$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2(e^x)'\,dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx\\ &= x^2e^x - \int 2x(e^x)'\,dx = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx\\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c\,.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x)e^{\alpha x}\,dx}$$

όπου P(x) πολυώνυμο του x και α ϵ $\mathbf{R}^*$.

ii) Έχουμε

$$\int x\eta\mu 2x dx = \frac{1}{2}\int x(-\sigma\upsilon\nu 2x)' dx = -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx = -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c\ .$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x)\eta\mu(\alpha x)dx\ ,}\quad \boxed{\int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx}$$

όπου P(x) πολυώνυμο του x και α ϵ $\mathbf{R}^*$.

iii) Έχουμε

$$\int (4x^3+1)\ln x dx = \int (x^4+x)'\ln x dx = (x^4+x)\ln x - \int (x^4+x)\frac{1}{x}dx$$

$$= (x^4+x)\ln x - \int (x^3+1)dx = (x^4+x)\ln x - \frac{x^4}{4} - x + c\ .$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x)\ln(\alpha x)dx\ ,}$$

όπου P(x) πολυώνυμο του x και α ϵ $\mathbf{R}^*$.

iv) Θέτουμε $I = \int e^x \eta\mu(2x)dx$, οπότε έχουμε

$$I = \int (e^x)'\eta\mu(2x)dx = e^x\eta\mu(2x) - 2\int e^x\sigma\upsilon\nu(2x)dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2\int (e^x)'\sigma\upsilon\nu(2x)dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) - 4\int e^x\eta\mu 2x dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) - 4I\ .$$

Επομένως ,

$$5I = e^x \eta\mu(2x) - 2e^x \sigma\upsilon\nu(2x) + c_1,$$

οπότε

$$I = \frac{1}{5}e^x \eta\mu(2x) - \frac{2}{5}e^x \sigma\upsilon\nu(2x) + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)dx,} \quad \boxed{\int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx}$$

όπου $\alpha,\beta \in \mathbf{R}^*$.

2. Ο πληθυσμός P(t), 0 ≤ t ≤ 20, μιας πόλης, που προέκυψε από συγχώνευση 10 κοινοτήτων, αυξάνεται με ρυθμό (σε άτομα ανά έτος) που δίνεται από τον τύπο $P'(t) = te^{t/10}$, $0 \le t \le 20$, όπου t είναι ο αριθμός των ετών μετά τη συγχώνευση. Να βρεθεί ο πληθυσμός P(t) της πόλης t χρόνια μετά τη συγχώνευση, αν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ήταν 10000 κάτοικοι κατά τη στιγμή της συγχώνευσης.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $te^{t/10}$

$$\begin{aligned}\int P'(t)dt &= \int te^{1/10}dt \\ &= 10\int (e^{t/10})'tdt \\ &= 10e^{t/10}\cdot t - 10\int e^{t/10}dt \\ &= 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + c,\end{aligned}$$

οπότε

$$P(t) = 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + c, \quad \text{για κάποιο } c \in \mathbf{R}$$

Όταν t = 0, ο πληθυσμός είναι 10000. Συνεπώς:

$$P(0) = 10000 \Leftrightarrow 10e^0 \cdot 0 - 100e^0 + c = 10000 \Leftrightarrow c = 10100.$$

Άρα, ο πληθυσμός της πόλης, t χρόνια μετά τη συγχώνευση, είναι

$$P(t) = 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + 10100.$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$. Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο :

$$\boxed{\begin{array}{c} \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du\,, \\ \text{όπου} \quad u = g(x) \quad \text{και} \quad du = g'(x)dx \end{array}}$$

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$ του δευτέρου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Η απόδειξη του τύπου αυτού στηρίζεται στο γνωστό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Πράγματι, αν F είναι μια παράγουσα της f, τότε

$$F'(u) = f(u) \qquad (1)$$

οπότε

$$F'(g(x)) = f(g(x))$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)dx &= \int F'(g(x))g'(x)dx \\ &= \int (F(g(x)))'dx \qquad \left(\text{αφού } (F(g(x))' = F'(g(x))g'(x)\right) \\ &= F(g(x)) + c \\ &= F(u) + c\,, \qquad (\text{όπου } u = g(x) \\ &= \int f(u)du \qquad (\text{λόγω της } (1)) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2 + 1$ και $du = (x^2 + 1)'dx = 2xdx$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du$$
$$= \int u^{1/2}du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c\,.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\textbf{i)}\ \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx \qquad \textbf{ii)}\ \int \varepsilon\varphi x dx\,.$$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u = 1+e^x$, οπότε $du = (1+e^x)'dx = e^x dx$. Επομένως,

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{1+e^x} + c$$

ii) Έχουμε $\int \varepsilon\varphi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$. Επομένως, αν θέσουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $du = (\sigma\upsilon\nu x)'dx = -\eta\mu x dx$, έχουμε:

$$\int \varepsilon\varphi x dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c\,.$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\textbf{i)}\ \int \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx \qquad \textbf{ii)}\ \int \frac{1}{1-2x}dx \qquad \textbf{iii)}\ \int x(x^2-1)^{99}dx\,.$$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u = 2x + \frac{\pi}{6}$, οπότε $du = (2x + \frac{\pi}{6})' dx = 2dx$.

Επομένως,

$$\int \eta\mu(2x + \frac{\pi}{6})dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu(2x + \frac{\pi}{6})\cdot 2dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu u\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu u + c = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(2x + \frac{\pi}{6}) + c.$$

ii) Θέτουμε $u = 1 - 2x$, οπότε $du = (1 - 2x)' dx = -2dx$.

Επομένως,

$$\int \frac{1}{1-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln|u| + c = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + c.$$

iii) Θέτουμε $u = x^2 - 1$, οπότε $du = 2xdx$. Άρα

$$\int x(x^2-1)^{99}dx = \frac{1}{2}\int u^{99}du = \frac{1}{2}\frac{u^{100}}{100} + c = \frac{1}{200}(x^2-1)^{100} + c.$$

3. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\text{i)}\ \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx \qquad\qquad \text{ii)}\ \int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx.$$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R} - \{2,3\}$ και γράφεται

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}.$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς Α, Β έτσι, ώστε να ισχύει

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} - \{2,3\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε τελικά :

$$(A + B - 2)x = 3A + 2B + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} - \{2,3\}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε x ϵ $\mathbf{R} - \{2,3\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A + B - 2 = 0 \\ 3A + 2B + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad \begin{cases} A = -5 \\ B = 7 \end{cases}.$$

Επομένως ,

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3}\right) dx = \int \frac{-5}{x-2} dx + \int \frac{7}{x-3} dx$$
$$= -5\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + c .$$

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\boxed{\int \frac{\kappa x + \lambda}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx, \quad \text{με} \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0}$$

ii) Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $x^2 - 3x + 7$ με το πολυώνυμο $x^2 - 5x + 6$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{2x+1}{x^2-5x+6} .$$

Επομένως ,

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6} dx = \int 1 dx + \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$$
$$= x - 5\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + c \qquad \text{(λόγω του (i))}.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{P(x)}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx ,$$

όπου P (x) πολυώνυμο του x βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 και $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2 e^{-x}\,dx$ ii) $\int (3x^2-2x+1)e^{2x}\,dx$ iii) $\int x^3 \ln x\,dx$

iv) $\int 2x^2\,\eta\mu 2x\,dx$ v) $\int 4x\,\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$ vi) $\int \ln x\,dx$,

vii) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ viii) $\int e^x\,\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$ ix) $\int e^x\,\eta\mu x\,dx$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \eta\mu 3x\,dx$ ii) $\int (4x^2-16x+7)^3(x-2)\,dx$

iii) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4}\,dx$ iv) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}\,dx$

v) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int e^x\,\eta\mu e^x\,dx$ ii) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ iii) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

iv) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}\,dx$ v) $\int \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$ ii) $\int \varepsilon\varphi x\cdot\ln(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$ iii) $\int \sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\eta\mu x}\,dx$.

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}} \cdot \frac{1}{x^4}\,dx$ ii) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ iii) $\int x\ln(x^2+1)\,dx$.

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2 \ln x^2\,dx$ ii) $\int (\ln t)^2\,dt$ iii) $\int e^{2x}\text{συν}e^x\,dx$.

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \text{εφ}x\,dx$ και $\int \frac{x}{\text{συν}^2 x}\,dx$

ii) $\int \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}^2 x}\,dx$ και $\int \frac{1+\text{συν}x}{\text{ημ}^2 x}\,dx$

iii) $\int \text{ημ}^3 x\,dx$ και $\int \text{συν}^3 x\,dx$.

5. Με τη βοήθεια των τύπων

$$\text{ημ}^2\alpha = \frac{1-\text{συν}2\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \text{συν}^2\alpha = \frac{1+\text{συν}2\alpha}{2}$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i) $\int \text{ημ}^2 x\,dx$ ii) $\int \text{συν}^2 x\,dx$ iii) $\int \text{ημ}^2 x\,\text{συν}^2 x\,dx$.

6. Με τη βοήθεια των τύπων

$$2\text{ημ}\alpha\text{συν}\beta = \text{ημ}(\alpha-\beta)+\text{ημ}(\alpha+\beta),$$

$$2\text{συν}\alpha\text{συν}\beta = \text{συν}(\alpha-\beta)+\text{συν}(\alpha+\beta)$$

$$2\text{ημ}\alpha\text{ημ}\beta = \text{συν}(\alpha-\beta)-\text{συν}(\alpha+\beta)$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i) $\int \text{ημ}x\,\text{συν}2x\,dx$ ii) $\text{συν}3x\,\text{συν}5x\,dx$ iii) $\int \text{ημ}2x\,\text{ημ}4x\,dx$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx$ ii) $\int \frac{3x+2}{x^2-3x+2}\,dx$

iii) $\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}\,dx$ iv) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$.