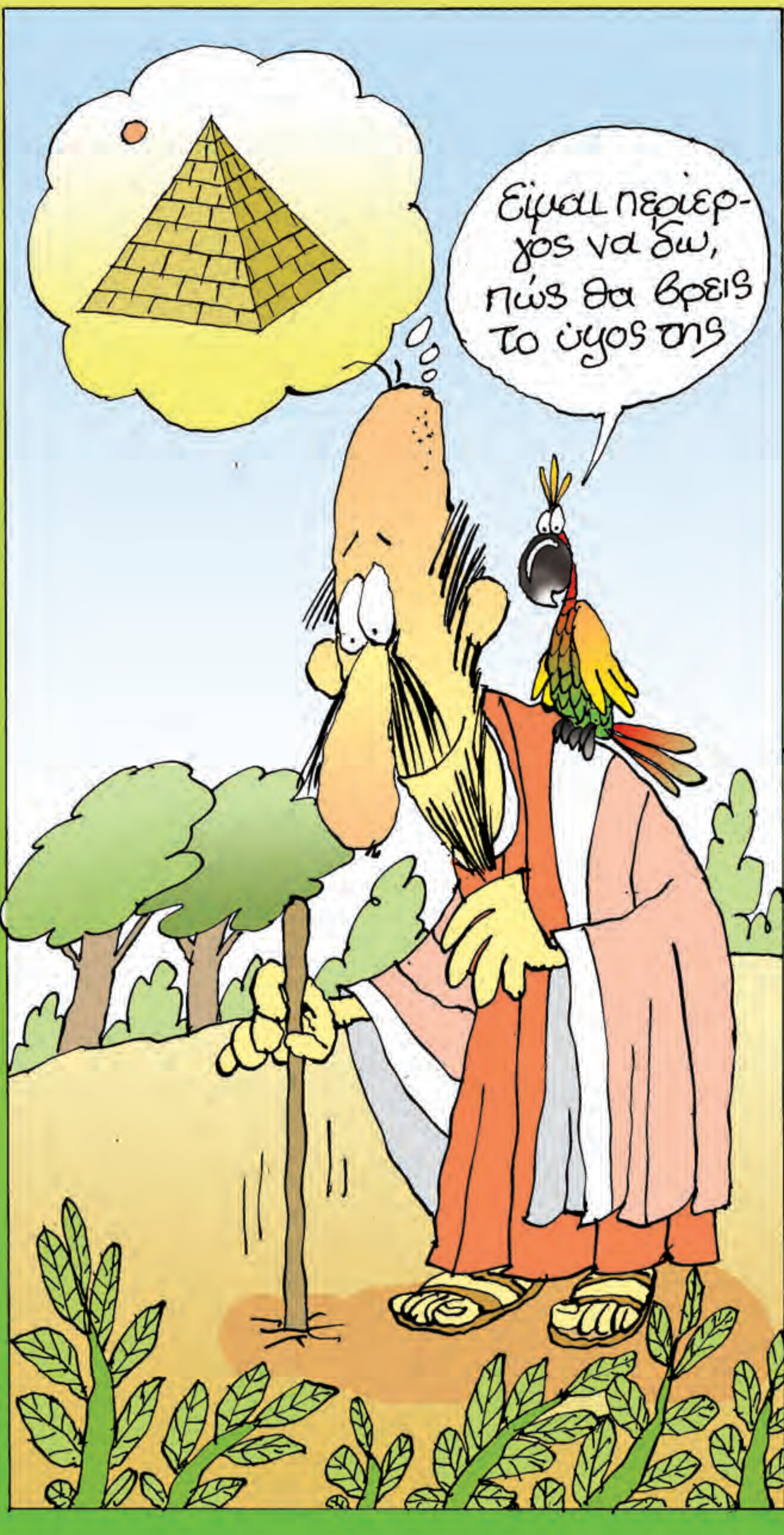

Β΄ ΜΕΡΟΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ


1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ


ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

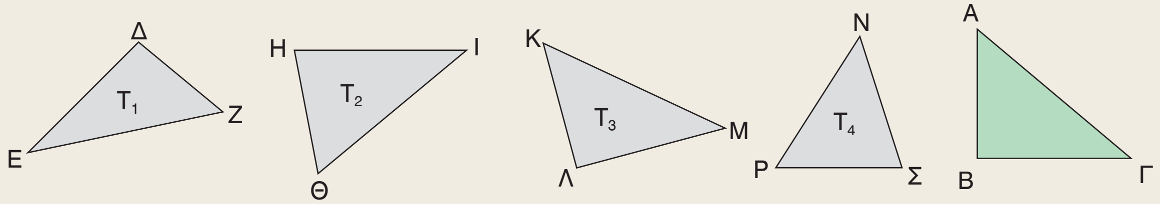

Είμαι περίεργος να δω, πώς θα βρεις το ύψος της

1.1 Ισότητα τριγώνων

Θυμάμαι ποια είναι τα στοιχεία ενός τριγώνου (κύρια – δευτερεύοντα) και τα είδη των τριγώνων.
Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
Μαθαίνω ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, χωρίς αυτό να μεταβληθεί, τότε θα ταυτιστεί με ένα από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4.

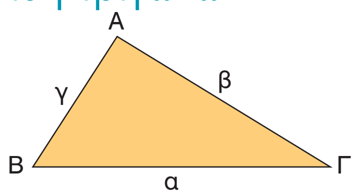


1. Να αποτυπώσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε διαφανές χαρτί και να βρείτε με ποιο από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4 ταυτίζεται.

2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

ΑΒ = ..., ΒΓ = ..., ΓΑ = ..., $\hat{A}$ = ..., $\hat{B}$ = ... και $\hat{\Gamma}$ = ...

Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων



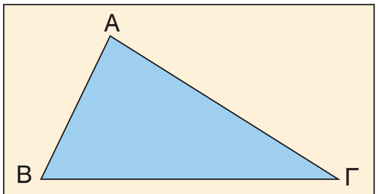
Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες του $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ συμβολίζονται αντιστοίχως α, β, γ.

Για τις γωνίες κάθε τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ}$

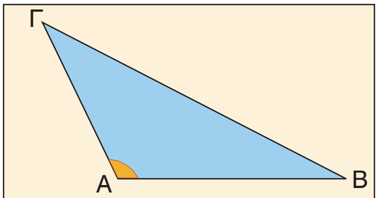
Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η γωνία $\hat{A}$.

Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκείμενες** γωνίες της πλευράς αυτής π.χ. προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

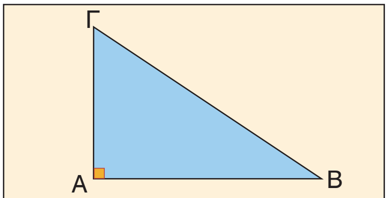
Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:



Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.

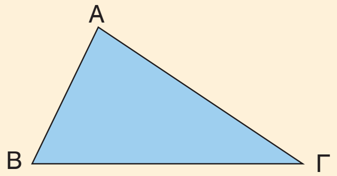


Αμβλυγώνιο, όταν έχει μια γωνία αμβλεία.

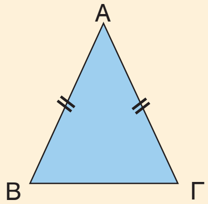


Ορθογώνιο, όταν έχει μια γωνία ορθή.

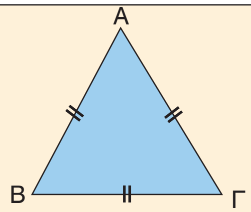
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.
Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:



Σκαληνό, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.



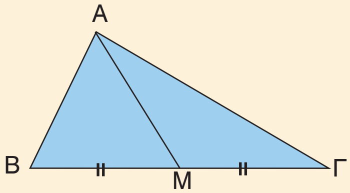
Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές ίσες.



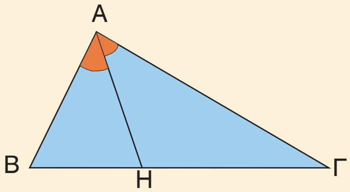
Ισόπλευρο, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο Α **κορυφή** του.

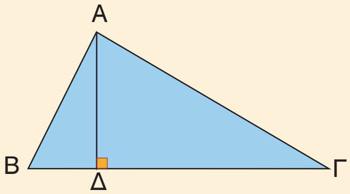
Σ' ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα **δευτερεύοντα στοιχεία**, που είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.



Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.



Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

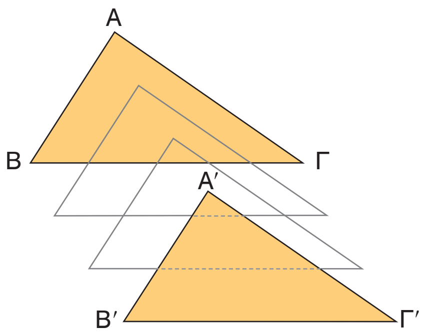


Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

Ίσα τρίγωνα

Αν μετατοπίσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε μια άλλη θέση και θεωρήσουμε ότι κατά τη μετατόπισή του αυτό δε μεταβάλλεται, τότε οι κορυφές του Α, Β, Γ θα πάρουν τις θέσεις των σημείων Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως και το τρίγωνο ΑΒΓ θα πάρει τη θέση του τριγώνου Α′Β′Γ′.
Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ταυτίζονται, τότε οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους θα είναι ίσες, αφού και αυτές ταυτίζονται. Έτσι έχουμε:

$$\text{ΑΒ} = \text{Α}'\text{Β}', \quad \text{ΒΓ} = \text{Β}'\text{Γ}', \quad \text{ΑΓ} = \text{Α}'\text{Γ}' \quad \text{και}$$
$$\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Α}}', \quad \hat{\text{Β}} = \hat{\text{Β}}', \quad \hat{\text{Γ}} = \hat{\text{Γ}}'.$$



Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′, για τα οποία ισχύουν οι προηγούμενες ισότητες, λέμε ότι είναι ίσα. Δηλαδή

- **Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.**

Ισχύει ακόμη και το αντίστροφο. Δηλαδή

- **Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.**

Στο εξής σε κάθε μετατόπιση τριγώνου θα θεωρούμε ότι αυτό δε μεταβάλλεται. Αυτό σημαίνει ότι, αν έχουμε δύο ίσα τρίγωνα, μπορούμε να μετατοπίσουμε κατάλληλα το ένα από αυτά, ώστε να πέσει πάνω στο άλλο.

Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα δεν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι έχουν όλες τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία.

Στη συνέχεια, θα μάθουμε προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε ότι και με λιγότερα στοιχεία είναι δυνατόν να διακρίνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα.

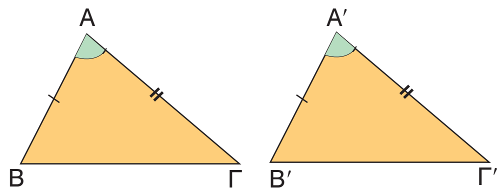
Οι προτάσεις αυτές είναι γνωστές ως **κριτήρια ισότητας τριγώνων**.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο ισότητας (Π – Γ – Π)

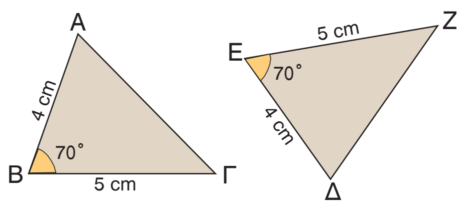
Για δύο τρίγωνα ισχύει η παρακάτω **βασική ιδιότητα ισότητας**

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.



Πράγματι, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν δύο πλευρές ίσες ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και την περιεχόμενη γωνία τους ίση $\hat{A} = \hat{A}'$.

Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε η γωνία $\hat{A}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{A}'$ και η πλευρά ΑΒ να συμπέσει με την ίση της πλευρά Α′Β′, τότε η πλευρά ΑΓ θα συμπέσει με την ίση της πλευρά Α′Γ′ και οι κορυφές Β, Γ θα συμπέσουν με τις κορυφές Β′, Γ′ αντιστοίχως. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ θα συμπέσουν, οπότε είναι ίσα.



Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΒ = ΔΕ = 4 cm, ΒΓ = ΕΖ = 5 cm) και την περιεχόμενη γωνία τους ίση ($\hat{B} = \hat{E} = 70°$). Επομένως, τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

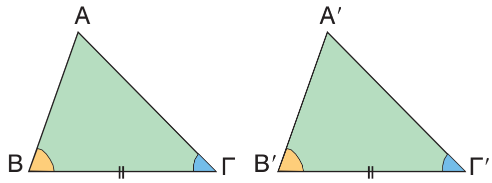
$$ΑΓ = ΔΖ, \quad \hat{Γ} = \hat{Z} \quad \text{και} \quad \hat{Δ} = \hat{A}.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες γωνίες $\hat{Γ}$, $\hat{Z}$ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΔ.

Γενικά:

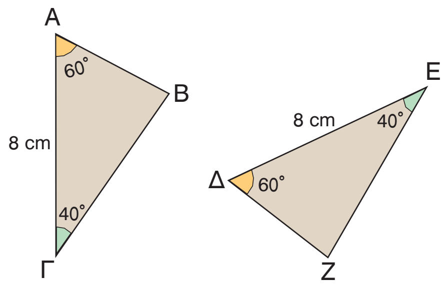
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

2ο κριτήριο ισότητας (Γ – Π – Γ).



Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν μία πλευρά ίση ΒΓ = Β′Γ′ και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες $\widehat{B} = \widehat{B}'$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$. Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε η πλευρά του ΒΓ να συμπέσει με την ίση της πλευρά Β′Γ′ και η γωνία $\widehat{B}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\widehat{B}'$, τότε η γωνία $\widehat{\Gamma}$ θα συμπέσει με την ίση της γωνία $\widehat{\Gamma}'$ και η κορυφή Α θα συμπέσει με την κορυφή Α′.
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ θα συμπέσουν, οπότε είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

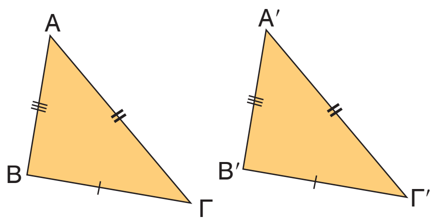


Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση (ΑΓ = ΔΕ = 8 cm) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες ($\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{E} = 40^\circ$).
Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\widehat{B} = \widehat{Z},\ AB = \Delta Z,\ B\Gamma = EZ.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΔΖ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{E}$.
Γενικά:
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

3ο κριτήριο ισότητας (Π – Π – Π).

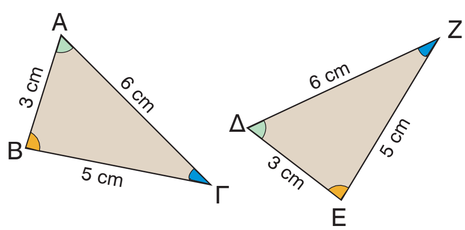


Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες

(ΑΒ = Α′Β′, ΒΓ = Β′Γ′, ΑΓ = Α′Γ′).

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε αυτό θα συμπέσει με το τρίγωνο Α′Β′Γ′, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

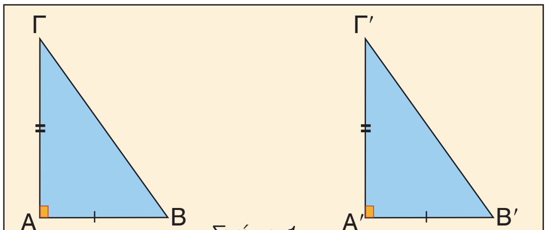


Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, ΑΒ = ΔΕ = 3 cm, ΑΓ = ΔΖ = 6 cm και ΒΓ = ΕΖ = 5 cm. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

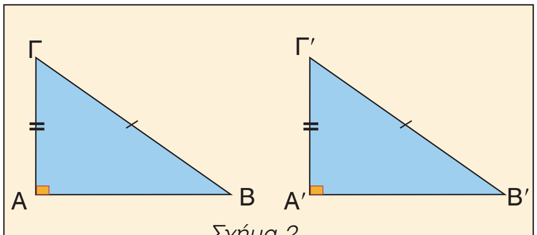
$$\widehat{A} = \widehat{\Delta},\ \widehat{B} = \widehat{E} \text{ και } \widehat{\Gamma} = \widehat{Z}.$$

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας τριγώνων μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ορθογώνια τρίγωνα.



Σχήμα 1

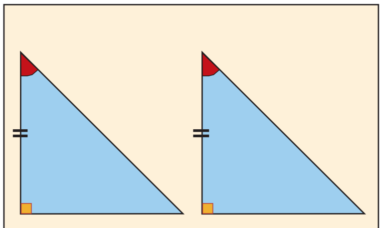


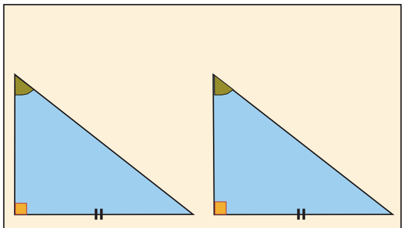
Σχήμα 2

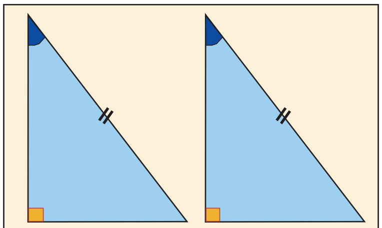
Στο σχήμα 1 τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, αφού αυτή είναι ορθή. Στο σχήμα 2 τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίση και όπως προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουν και την τρίτη πλευρά τους ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Οι δύο αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.


Σχήμα 3


Σχήμα 4


Σχήμα 5

Στο σχήμα 3 τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Στα σχήματα 4 και 5 τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Ο τρεις αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

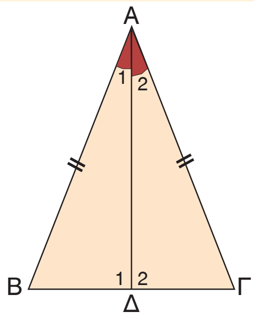
Από τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων διαπιστώνουμε ότι:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν
- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ.
α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.
β) Να αποδειχθεί ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι διάμεσος και ύψος.

Λύση



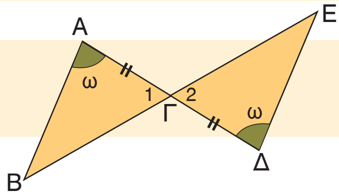
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:
- ΑΔ = ΑΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ΒΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.
Αφού είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

2 Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = \omega$ και ΑΓ = ΓΔ.
Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΔΕ.



Λύση

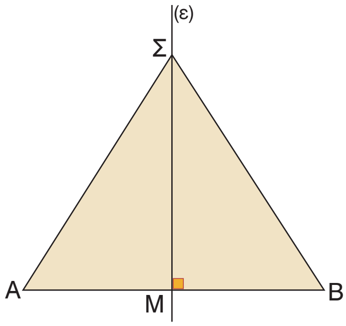
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ και παρατηρούμε ότι έχουν:
- ΑΓ = ΓΔ από την υπόθεση
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$ από την υπόθεση
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες ίσες μία προς μία.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΔΕ.

3 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Λύση

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που το τέμνει στο



σημείο Μ. Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΣΜ = ΣΜ, κοινή πλευρά και
- ΑΜ = ΜΒ, αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΣΑ = ΣΒ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

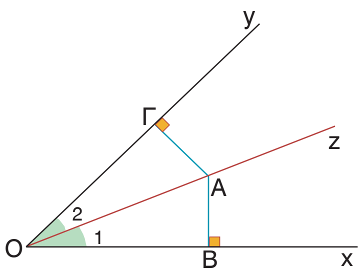
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

4 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση



Φέρνουμε τη διχοτόμο Oz της γωνίας $x\hat{O}y$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΟΑ = ΟΑ κοινή πλευρά και
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, αφού η Oz είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

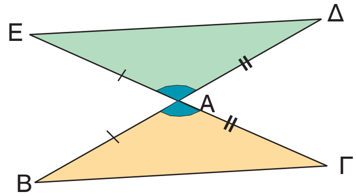
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι:

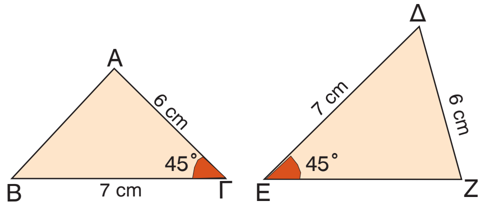
Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

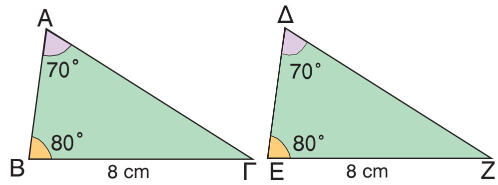
1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες
$\widehat{B}$ = ..., $\widehat{\Gamma}$ = ... και ΒΓ = ...



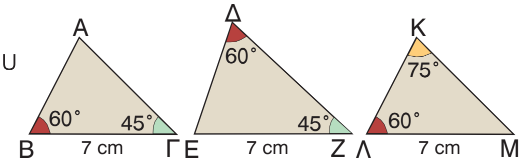
2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



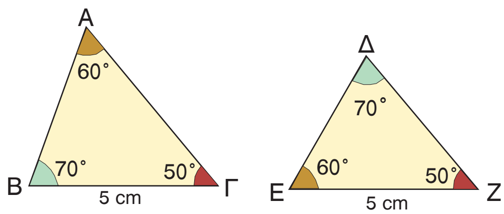
3 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες ΑΒ = ... και ΑΓ = ...



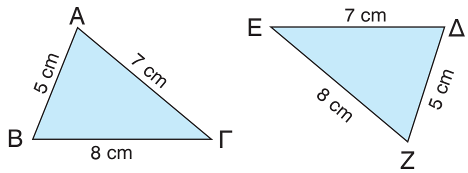
4 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του διπλανού σχήματος.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5 Είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



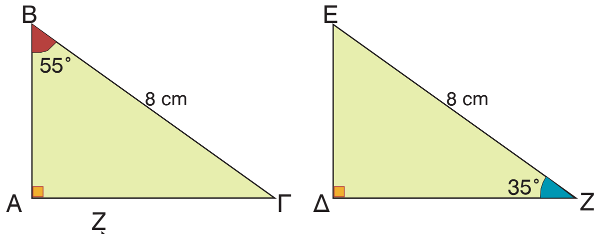
6 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\widehat{A}$ = ... , $\widehat{B}$ = ... και $\widehat{\Gamma}$ = ...



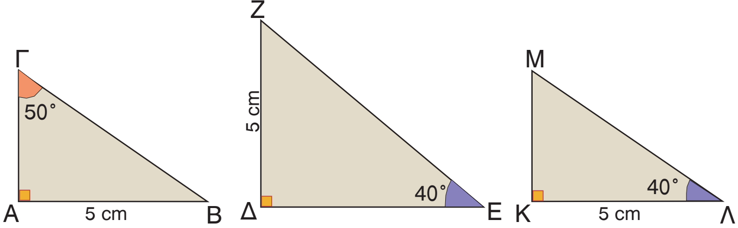
7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.
στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

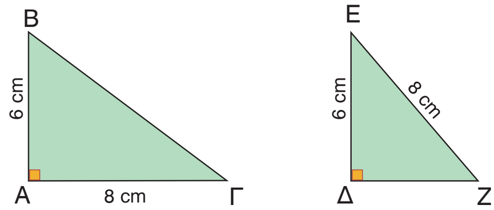
8 Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



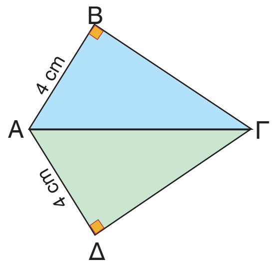
9 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



10 Τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος έχουν δύο πλευρές ίσες. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα.

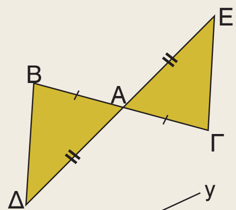


11 Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ.

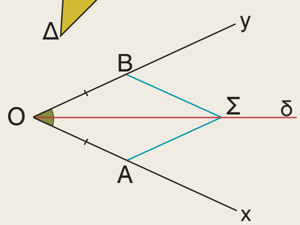


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ.
Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

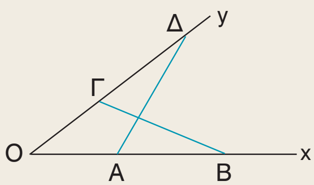


2 Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$. Αν ΟΑ = ΟΒ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι ΣΑ = ΣΒ.

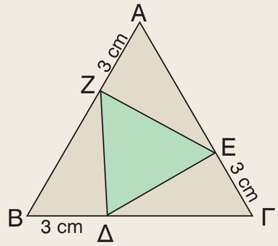


3 Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε ΒΔ = ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.

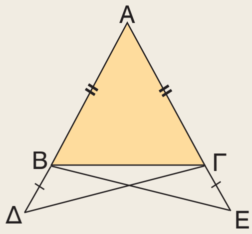
4 Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.
Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΑΔ.



5 Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



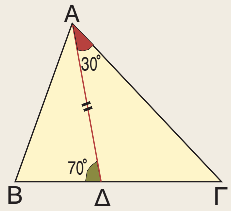
6 Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta} = \widehat{E}$.

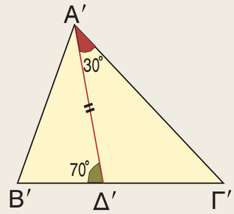


7 Σ' ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΔ και ΒΓ = ΓΔ.

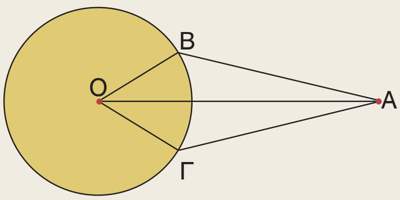
8 Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

9 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους ΑΔ και Α′Δ′ ίσες. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ = Α′Β′
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.

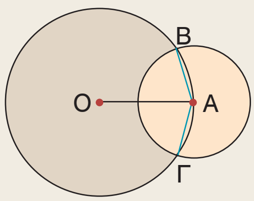




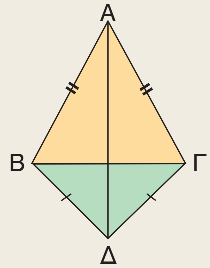
10 Στο διπλανό σχήμα το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα.



11 Αν Ο, Α είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{A}\Gamma$.



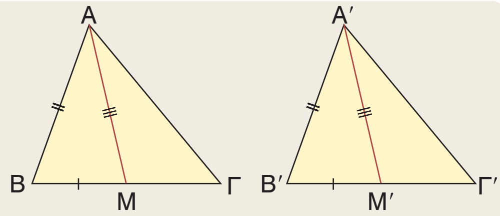
12 Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$.



13 Στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοι ΑΜ και Α′Μ′ είναι ίσες. Αν ΑΒ = Α′Β′ και ΒΜ = Β′Μ′, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

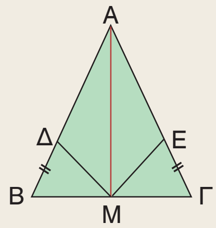
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



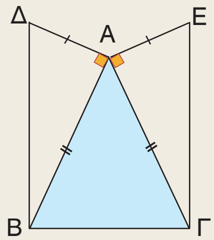
14 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Μ είναι μέσο της βάσης ΒΓ. Αν είναι ΒΔ = ΓΕ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές

β) τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ είναι ίσα.



15 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) να φέρετε ΑΔ ⊥ ΑΒ και ΑΕ ⊥ ΑΓ. Αν είναι ΑΔ = ΑΕ, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



16 Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΔ και ότι η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΒΔ.

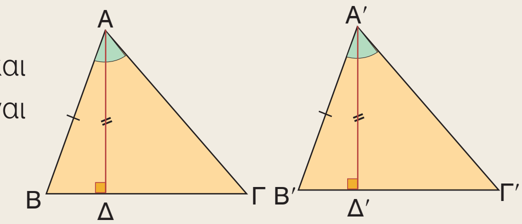
17 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο ΒΔ. Αν ΔΕ ⊥ ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΒΕ.

18 Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσον Μ ενός τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε).

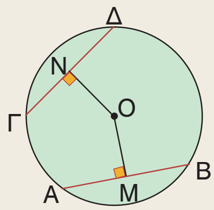
19 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν $\widehat{A} = \widehat{A}'$ και ΑΒ = Α′Β′. Αν τα ύψη τους ΑΔ και Α′Δ′ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B} = \widehat{B}'$

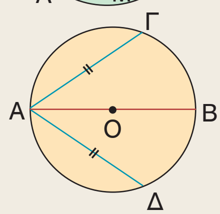
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



20 Αν οι χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματά τους ΟΜ, ΟΝ είναι ίσα. Ισχύει το αντίστροφο;



21 Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές ΑΓ και ΑΔ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και οι χορδές ΒΓ και ΒΔ είναι ίσες.



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

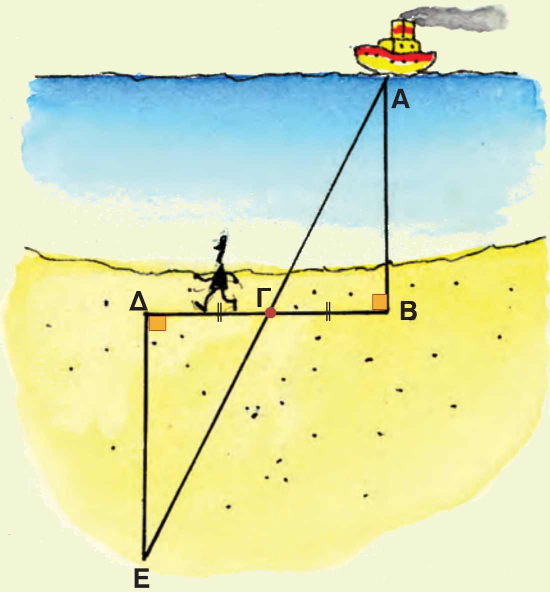
Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά

Αν ένα πλοίο βρίσκεται στη θέση Α στη θάλασσα, εμείς στεκόμαστε στη θέση Β στη στεριά και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση ΑΒ, τότε:

- Ξεκινάμε από το σημείο Β και περπατώντας πάνω στην παραλία κάθετα στην ΑΒ διανύουμε μιαν απόσταση ΒΓ. Στο σημείο Γ βάζουμε ένα σημάδι, π.χ. στερεώνουμε ένα ραβδί και συνεχίζοντας πάνω στην ίδια ευθεία διανύουμε την απόσταση ΓΔ = ΒΓ.

- Στο σημείο Δ αφού βάλουμε ένα σημάδι, π.χ. μια πέτρα, κάνουμε στροφή και περπατώντας κάθετα στη ΒΔ σταματάμε όταν βρεθούμε σ' ένα σημείο Ε, από το οποίο τα σημεία Α και Γ φαίνονται να είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Η ζητούμενη απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση ΔΕ την οποία μπορούμε να μετρήσουμε, αφού είναι πάνω στη στεριά.



Τη μέθοδο αυτή, λέγεται, ότι εφάρμοσε πριν από 2.500 χρόνια περίπου ο **Θαλής ο Μιλήσιος**.

> Πώς ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι ΑΒ = ΔΕ; Μπορείτε να το αποδείξετε; Αναζητήστε τις πέντε προτάσεις που απέδειξε ο Θαλής και σημειώστε ποια απ' αυτές χρησιμοποίησε για να υπολογίσει την απόσταση του πλοίου από τη στεριά.

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

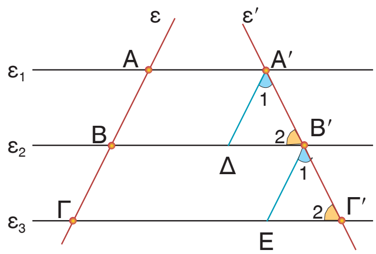
Μαθαίνω πότε παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει.
Μαθαίνω να διαιρώ ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα τμήματα.
Μαθαίνω τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και πώς υπολογίζεται.
Μαθαίνω πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα προς δύο άλλα τμήματα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να χαράξετε μια ευθεία ε κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να διαπιστώσετε ότι τρεις διαδοχικές γραμμές του τετραδίου ορίζουν στην ευθεία ε ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ε′ που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις προηγούμενες διαδοχικές γραμμές ορίζουν ίσα τμήματα και στην ε′;

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών



Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ να είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν μια άλλη ευθεία ε′ τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ στα σημεία Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′ είναι ίσα μεταξύ τους.

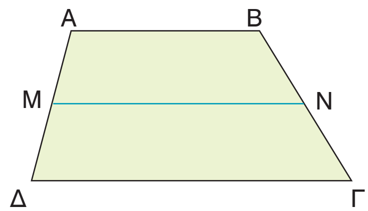
Πράγματι, αν φέρουμε Α′Δ // ε, Β′Ε // ε και συγκρίνουμε τα τρίγωνα Α′Β′Δ και Β′Γ′Ε παρατηρούμε ότι έχουν:

- Α′Δ = Β′Ε γιατί Α′Δ = ΑΒ, Β′Ε = ΒΓ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΑ′ΔΒ, ΒΒ′ΕΓ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε ΑΒ = ΒΓ.
- $\widehat{Β}_2' = \widehat{Γ}_2'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ε_2$, $ε_3$ που τέμνονται από την ε′.
- $\widehat{Α}_1' = \widehat{Β}_1'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Α′Δ, Β′Ε που τέμνονται από την ε′.

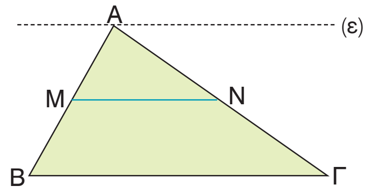
Τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, επομένως είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε Α′Β′ = Β′Γ′. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Για παράδειγμα, σ' ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) αν από το μέσο Μ της ΑΔ φέρουμε ευθεία ΜΝ παράλληλη προς τις βάσεις του, τότε οι παράλληλες ΑΒ, ΜΝ, ΔΓ, αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΔ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΒΓ. Άρα ΒΝ = ΝΓ.



Ομοίως, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ και από το μέσο Μ της ΑΒ φέρουμε ΜΝ // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ, ΒΓ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Άρα ΑΝ = ΝΓ.

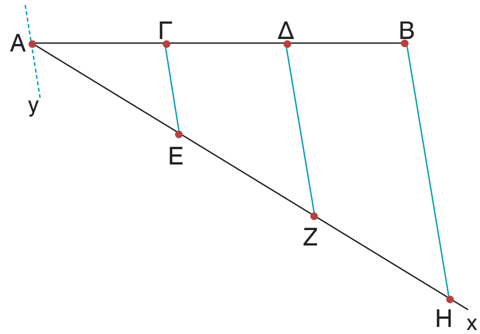


Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα

Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm και θέλουμε να το διαιρέσουμε σε τρία ίσα τμήματα, τότε το μήκος κάθε τμήματος θα είναι 1,66... cm, οπότε καθένα από αυτά δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια.



Μπορούμε όμως να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα με ακρίβεια, αν εργαστούμε με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη ως εξής:

Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με τον διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ.

Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αy παράλληλες προς τη ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα έχουμε ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

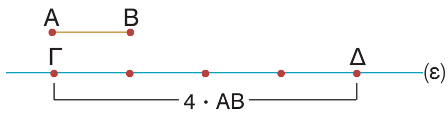
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο ΑΒ σε 4, 5, 6, ..., ν ίσα τμήματα.

Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων

- Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σε μια ευθεία ε πάρουμε τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που το καθένα είναι ίσο με ΑΒ, τότε κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, για το οποίο λέμε ότι είναι ίσο με 4 · ΑΒ και γράφουμε ΓΔ = 4 · ΑΒ.

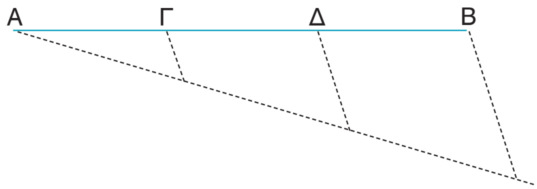
  Η ισότητα αυτή γράφεται και ως εξής: $\frac{ΓΔ}{ΑΒ} = 4$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο **λόγος** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός 4.



- Αν διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ, τότε λέμε ότι το τμήμα ΑΓ είναι ίσο με $\frac{1}{3} \cdot ΑΒ$ και γράφουμε:

$ΑΓ = \frac{1}{3} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$.



Λέμε ακόμη ότι:

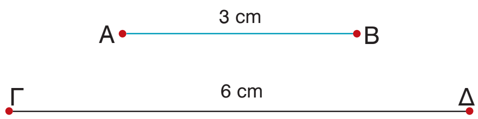
$ΑΔ = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$.

Δηλαδή ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{1}{3}$, ενώ ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{2}{3}$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει $ΓΔ = λ \cdot ΑΒ$.

- Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 3 cm και ΓΔ = 6 cm, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι $\frac{1}{2}$,



δηλαδή είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους $\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$

Γενικά

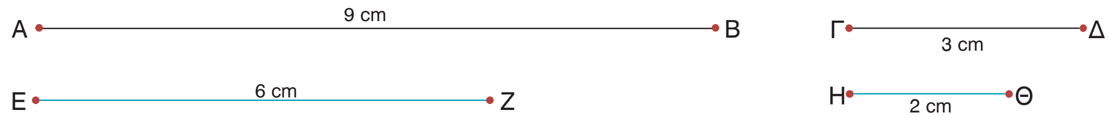
Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Για παράδειγμα, αν έχουμε ΔΕ = 120 cm και ΖΗ = 1,5 m, τότε

$$\frac{ΔΕ}{ΖΗ} = \frac{120\text{ cm}}{1{,}5\text{ m}} = \frac{120\text{ cm}}{150\text{ cm}} = \frac{4}{5}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ένας αριθμός που εκφράζει τη σχέση που συνδέει τα μήκη τους.
Αν γνωρίζουμε λοιπόν τον λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων π.χ. $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = 2$, αυτό σημαίνει ότι το μήκος του ΑΒ είναι διπλάσιο από το μήκος του ΓΔ, αλλά δε γνωρίζουμε το μήκος κάθε τμήματος, αφού είναι δυνατό να είναι ΑΒ = 80 cm και ΓΔ = 40 cm ή ΑΒ = 18 cm και ΓΔ = 9 cm κ.τ.λ.

Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα



Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 9 cm και ΓΔ = 3 cm, τότε ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 3$. Ομοίως, αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ = 6 cm και ΗΘ = 2 cm, τότε ο λόγος του ΕΖ προς το ΗΘ είναι $\frac{EZ}{H\Theta} = 3$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta} = 3$, δηλαδή ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του ΕΖ προς το ΗΘ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΗΘ.

Γενικά

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα **β, γ** ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή ως α, β, γ, δ θεωρούμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων.

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

  Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

  Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

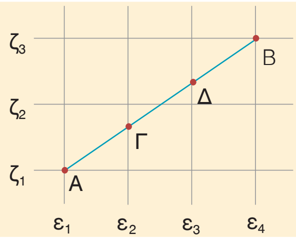
  Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε τετραγωνισμένο χαρτί έχουμε χαράξει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

α) Να συγκριθούν τα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.

β) Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$, $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}$, $\frac{ΑΔ}{ΒΓ}$.



Λύση

α) Οι παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$, $ε_4$ ορίζουν ίσα τμήματα στην ευθεία $ζ_1$, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

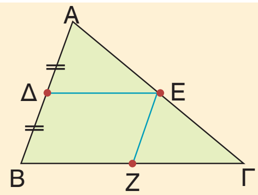
β) Αφού τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ είναι ίσα, έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}, \quad \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{3}{2}, \quad \frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{2}{2} = 1$$

2 Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ζ το μέσον της πλευράς ΒΓ

β) $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο ΑΒ και ΔΕ // ΒΓ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ. Επειδή Ε το μέσο της ΑΓ και ΕΖ // ΑΒ, έχουμε Ζ μέσο ΒΓ.

β) Το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα ΔΕ = ΒΖ. Όμως $ΒΖ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

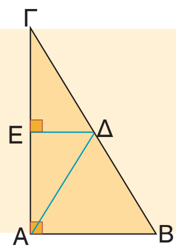
Άμεσα λοιπόν προκύπτει ότι:

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

3 Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$) και ΔΕ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ε μέσο της πλευράς ΑΓ

β) $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ.

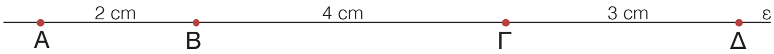
β) Επειδή ΔΕ // ΑΒ και ΑΒ ⊥ ΑΓ, θα είναι ΔΕ ⊥ ΑΓ. Άρα, ΔΕ μεσοκάθετος του ΑΓ και από τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου έχουμε ΑΔ = ΔΓ.

Όμως $ΔΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

4 Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικά σημεία μιας ευθείας ε τέτοια ώστε ΑΒ = 2 cm, ΒΓ = 4 cm και ΓΔ = 3 cm, να αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΑΓ.

Λύση

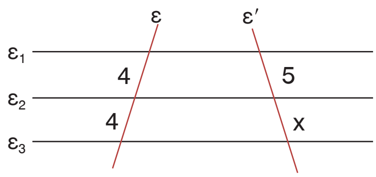


Είναι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{2\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{1}{2}$ και $\frac{ΓΔ}{ΑΓ} = \frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$.

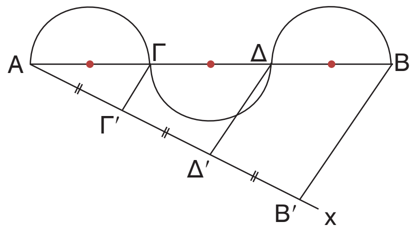
Άρα έχουμε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ που σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΑΓ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

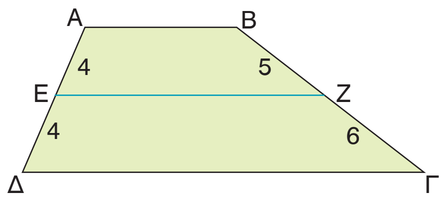
1 Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1 \,//\, ε_2 \,//\, ε_3$.
Να υπολογίσετε το x.



2 Αν Β′Β // ΓΓ′ // ΔΔ′ και η διάμετρος ΓΔ του δεύτερου ημικυκλίου είναι 4 cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



3 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι η ΕΖ παράλληλη προς τις βάσεις του;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \_\_$ β) $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \_\_$

γ) $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \_\_$ δ) $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \_\_$

5 Αν ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ
να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{AB}{A\Delta} = \text{—}$ β) $\frac{B\Delta}{BE} = \text{—}$ γ) $\frac{A\Gamma}{AE} = \text{—}$ δ) $\frac{AE}{B\Gamma} = \text{—}$ ε) $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \text{—}$

6 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν ΑΒ = 8 cm και ΓΔ = 12 cm, τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}$. ☐

β) Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}$, τότε ΑΒ = 2 και ΓΔ = 3. ☐

γ) Ο λόγος δύο πλευρών τετραγώνου είναι ίσος με 1. ☐

δ) Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5}$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. ☐

ε) Ο λόγος της ακτίνας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του είναι 2. ☐

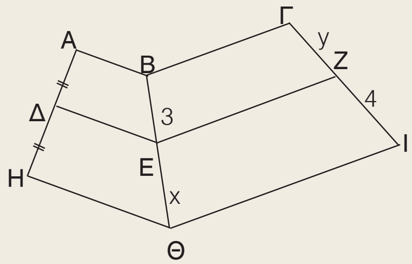
στ) Αν Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$. ☐

ζ) Ο λόγος μιας πλευράς ισόπλευρου τριγώνου προς την περίμετρό του είναι $\frac{1}{3}$. ☐

7 Βλέποντας την αναλογία $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{4}$ η Μαρία ισχυρίστηκε ότι ΑΒ = 1 και ΓΔ = 4, ενώ η Ελένη ισχυρίστηκε ότι το ΓΔ είναι τετραπλάσιο του ΑΒ. Ποια από τις δύο έχει δίκιο;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ΔΕ // ΗΘ και ΒΓ // ΕΖ // ΘΙ.
Αν ΑΔ = ΔΗ, να υπολογίσετε το x και το y.



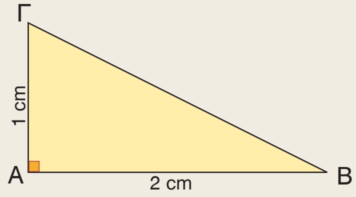
2 α) Με κανόνα και διαβήτη να διαιρέσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 7 cm σε πέντε ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Πάνω σε μια ευθεία ε να σχεδιάσετε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta = \frac{2}{5}AB$, $\Delta Z = \frac{4}{5}AB$ και $ZH = \frac{6}{5}AB$.

β) Να υπολογίσετε τους λόγους:

i) $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ ii) $\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta}$ iii) $\frac{AB}{ZH}$ iv) $\frac{ZH}{\Delta Z}$ v) $\frac{\Gamma\Delta}{ZH}$

3 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να βρείτε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{A\Gamma}$ β) $\frac{B\Gamma}{AB}$ γ) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$



4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι ΑΒ = 6 cm και ΒΓ = 10 cm. Να υπολογίσετε τους λόγους:

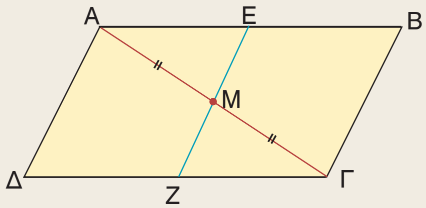
α) $\frac{AB}{B\Gamma}$ β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{AB}{A\Gamma}$

5 Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4 cm. Να υπολογίσετε το λόγο του ύψους του προς την πλευρά του.

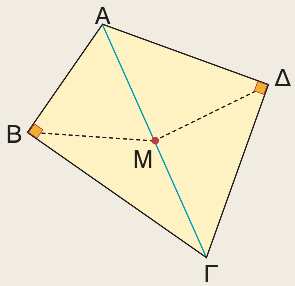
6 Από το μέσο Μ της διαγωνίου ΑΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, έχουμε φέρει ΕΖ // ΑΔ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΔΓ αντιστοίχως.

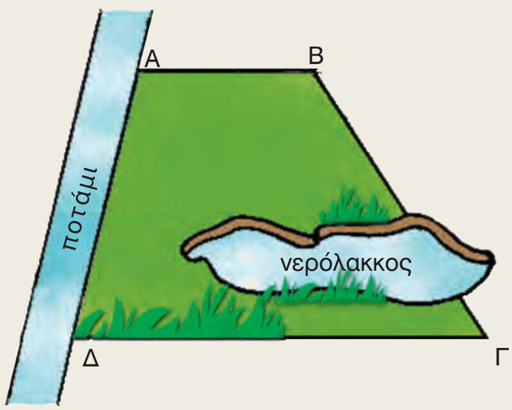
β) Τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα ΑΕ, ΑΜ.



7 Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.
Αν Μ είναι το μέσον της διαγωνίου ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΒΜ = ΜΔ.



8 Ένα αγρόκτημα έχει το σχήμα ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ο ιδιοκτήτης του θέλει να μετρήσει την περίμετρό του, προκειμένου να το περιφράξει αλλά τη ΒΓ δεν μπορεί να τη μετρήσει γιατί παρεμβάλλεται ένας νερόλακκος που σχηματίστηκε από την τελευταία βροχόπτωση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πώς θα μπορούσε να την υπολογίσει;



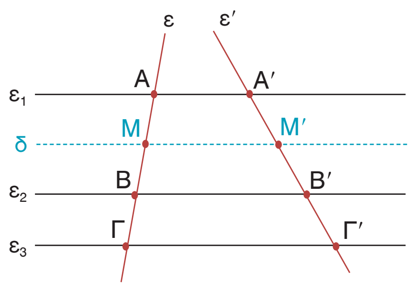
1.3 Θεώρημα του Θαλή

Μαθαίνω το Θεώρημα του Θαλή και πώς να το χρησιμοποιώ για τον υπολογισμό του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος και του λόγου δυο τμημάτων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να χαράξετε μια ευθεία ε κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να επιλέξετε τρεις γραμμές του τετραδίου που να ορίζουν στην ε δύο ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε το ένα από αυτά να είναι διπλάσιο του άλλου.

2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ε' που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις γραμμές που επιλέξατε προηγουμένως ορίζουν και στην ε' δύο ευθύγραμμα τμήματα, που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου;



Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$.
Αν μια άλλη ευθεία ε' τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και για τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′ ισχύει μια ανάλογη σχέση. Δηλαδή $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$.
Πράγματι, αν από το μέσο Μ του ΑΒ φέρουμε την ευθεία δ παράλληλη προς τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, τότε οι παράλληλες ευθείες ε_1, δ, ε_2, ε_3 ορίζουν στην ευθεία ε ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ευθεία ε'.
Δηλαδή ισχύει $Α'Μ' = Μ'Β' = Β'Γ'$ και επομένως $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αν $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$ θα ισχύει και $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$, οπότε:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{2 \cdot ΒΓ}{2 \cdot Β'Γ'} \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'}.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′.

Γενικά

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

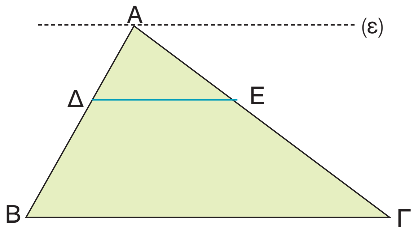
$$\text{αν} \quad \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \quad \text{τότε} \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$$

Η προηγούμενη **πρόταση είναι γνωστή ως θεώρημα του Θαλή**.
Από την ισότητα των τριών λόγων του Θεωρήματος του Θαλή έχουμε τις εξής αναλογίες

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} \quad \text{και} \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}.$$

Αν στις αναλογίες αυτές εναλλάξουμε τους μέσους όρους, τότε προκύπτουν και οι εξής αναλογίες $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A'B'}{A'\Gamma'}$.

Για παράδειγμα, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν ΔΕ // ΒΓ και από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ευθείες ε, ΔΕ, ΒΓ θα ορίζουν στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τμήματα ανάλογα.



Δηλαδή, $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\Delta B}{E\Gamma}$, οπότε και $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$.

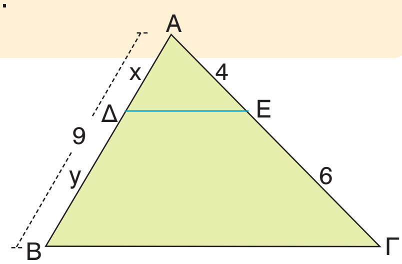
Αποδεικνύεται ακόμη ότι, αν ισχύει $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$, τότε ΔΕ // ΒΓ. Επομένως:

Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- **Αν ΔΕ // ΒΓ τότε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$.**
- **Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ τότε ΔΕ // ΒΓ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 9, ΑΕ = 4 και ΕΓ = 6. Αν ΔΕ // ΒΓ να υπολογιστούν τα x, y.



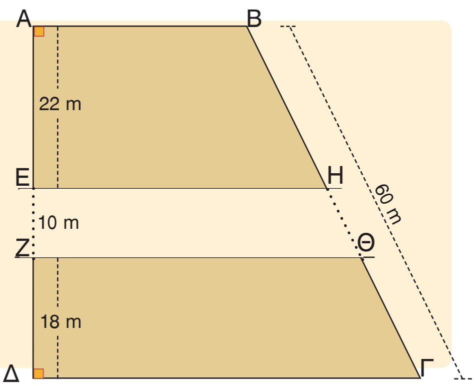
Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$\frac{A\Delta}{AE} = \frac{AB}{A\Gamma}$ ή $\frac{x}{4} = \frac{9}{10}$ ή $10x = 36$ ή $x = 3,6$.

Άρα $y = 9 - 3,6$ οπότε $y = 5,4$.

2 Μέσα από ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος τραπεζίου με ΑΔ = 50 m και ΒΓ = 60 m πέρασε ένας δρόμος παράλληλος προς τις πλευρές του ΑΒ, ΓΔ που είχε πλάτος 10 m και χώρισε το οικόπεδο στα δύο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν είναι ΑΕ = 22 m και ΖΔ = 18 m, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΗ, ΘΓ, ΗΘ.



Λύση

Επειδή ΑΒ // ΕΗ // ΔΓ από το Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$\dfrac{ΒΗ}{ΑΕ} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΔ}$ ή $\dfrac{ΒΗ}{22} = \dfrac{60}{50}$ ή $50 \cdot ΒΗ = 1320$ ή $ΒΗ = 26{,}40$ m.

Επειδή ΑΒ // ΖΘ // ΔΓ από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε

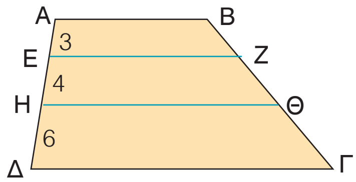
$\dfrac{ΘΓ}{ΖΔ} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΔ}$ ή $\dfrac{ΘΓ}{18} = \dfrac{60}{50}$ ή $50 \cdot ΘΓ = 1080$ ή $ΘΓ = 21{,}60$ m.

Άρα $ΗΘ = 60 - (26{,}40 + 21{,}60)$ ή $ΗΘ = 12$ m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν ΑΒ, ΕΖ, ΗΘ, ΔΓ είναι παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

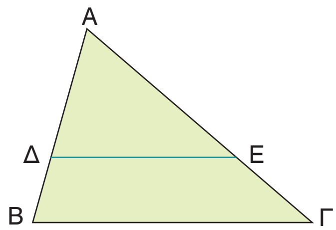
α) $\dfrac{ΒΖ}{ΘΓ} = \_\_\_$ β) $\dfrac{ΖΘ}{ΖΓ} = \_\_\_$ γ) $\dfrac{ΒΘ}{ΒΓ} = \_\_\_$



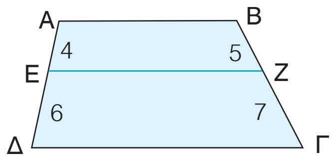
2 Αν ΔΕ // ΒΓ, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\dfrac{ΔΒ}{ΕΓ} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}$ ☐ β) $\dfrac{ΑΔ}{ΔΒ} = \dfrac{ΕΓ}{ΑΕ}$ ☐

γ) $\dfrac{ΑΒ}{ΑΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΕΓ}$ ☐ δ) $\dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{ΑΕ}{ΑΓ}$ ☐

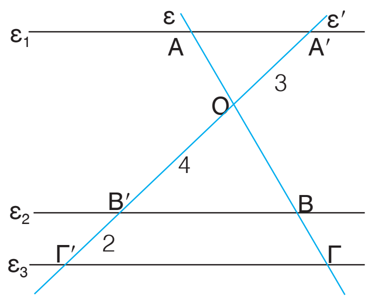


3 Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4 Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1$ // $ε_2$ // $ε_3$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

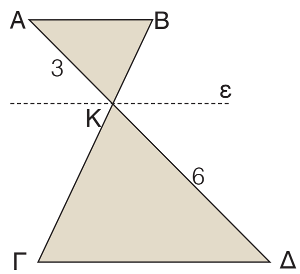
α) $\dfrac{ΟΒ}{ΒΓ}$ β) $\dfrac{ΒΓ}{ΟΓ}$ γ) $\dfrac{ΟΑ}{ΟΒ}$ δ) $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}$



5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ε // ΓΔ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε λόγο της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

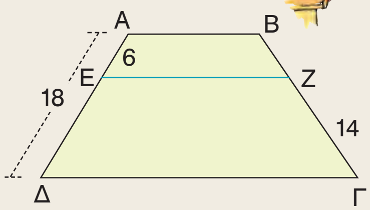
Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\dfrac{ΒΚ}{ΚΓ}$	1. $\dfrac{2}{3}$
β. $\dfrac{ΚΓ}{ΒΓ}$	2. $\dfrac{1}{3}$
γ. $\dfrac{ΒΓ}{ΒΚ}$	3. $\dfrac{1}{2}$
	4. 3

α	β	γ

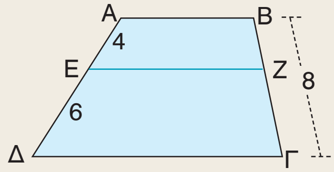


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

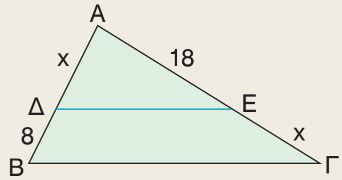
1. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βασεις του. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ.



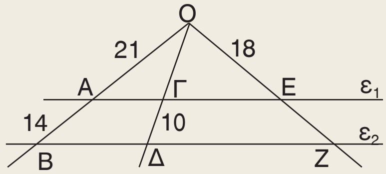
2. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΖΓ.



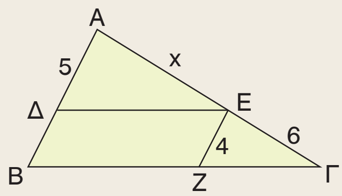
3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ. Να υπολογίσετε το x.



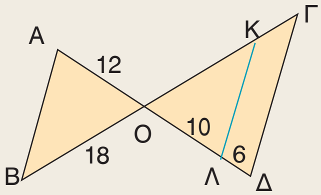
4. Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1$ // $ε_2$. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΕΖ.



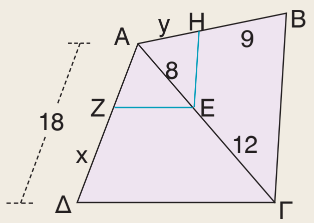
5. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, ΕΖ // ΑΒ.
Να υπολογίσετε το x.



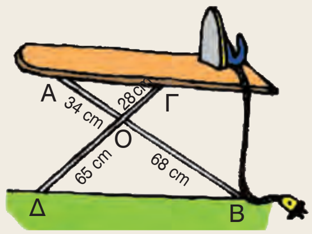
6. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ΚΛ // ΓΔ. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΚ και ΚΓ.



7. Στο διπλανό σχήμα είναι ΕΖ // ΔΓ και ΕΗ // ΒΓ.
Να υπολογίσετε τα x, y.



8. Κάποιος συναρμολόγησε μια πτυσσόμενη σιδερώστρα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και διαπίστωσε ότι η σανίδα δεν ήταν οριζόντια.
Πού έγινε το λάθος;



1.4 Ομοιοθεσία

Μαθαίνω να βρίσκω το ομοιόθετο ενός σχήματος.
Γνωρίζω με ποιες σχέσεις συνδέονται τα ομοιόθετα σχήματα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και στο εσωτερικό του να πάρετε ένα σημείο Ο.

2. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′, ΟΔ′ διπλάσια των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου.

3. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ″, ΟΒ″, ΟΓ″, ΟΔ″, μισά των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες τους με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε;

Το ομοιόθετο σημείου

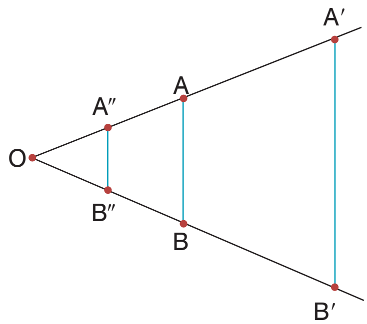
Αν πάρουμε δύο σημεία Ο, Α και στην ημιευθεία ΟΑ πάρουμε ένα σημείο Α′, τέτοιο ώστε ΟΑ′ = 2·ΟΑ, τότε λέμε ότι το σημείο Α′ είναι **ομοιόθετο** του Α με κέντρο Ο και λόγο λ = 2.

Αν Α″ σημείο της ημιευθείας ΟΑ, τέτοιο ώστε ΟΑ″ = $\frac{1}{2}$ · ΟΑ,

τότε το Α″ είναι ομοιόθετο του Α με κέντρο Ο και λόγο λ = $\frac{1}{2}$.

Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται **ομοιοθεσία**. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο** ομοιοθεσίας, ενώ ο αριθμός λ ονομάζεται **λόγος** ομοιοθεσίας. Είναι φανερό ότι το κέντρο Ο έχει ομοιόθετο τον εαυτό του.

Το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος



Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ = 2 το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα Α′Β′, όπου Α′, Β′ τα ομοιόθετα των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Επειδή ΟΑ′ = 2 ·ΟΑ και ΟΒ′ = 2 · ΟΒ, θα έχουμε $\frac{ΟΑ'}{ΟΑ} = \frac{ΟΒ'}{ΟΒ} = 2$, οπότε ΑΒ // Α′Β′.

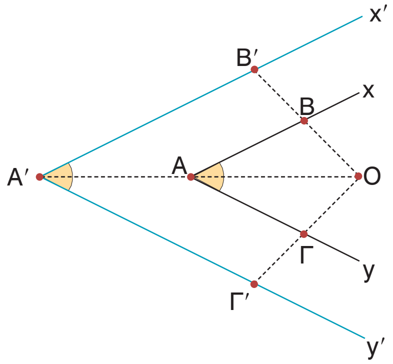
Επομένως

Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.

Αν συγκρίνουμε τα τμήματα Α′Β′ και ΑΒ, διαπιστώνουμε ότι Α′Β′ = 2 · ΑΒ ή $\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = 2$.

Αν $A''B''$ είναι ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$, τότε:
$A''B'' = \frac{1}{2} \cdot AB$ ή $\frac{A''B''}{AB} = \frac{1}{2}$.

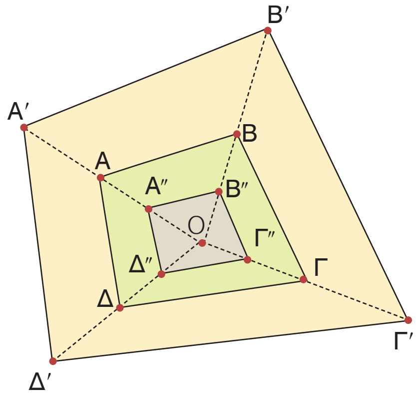
Το ομοιόθετο γωνίας



Για να βρούμε το ομοιόθετο μιας γωνίας $x\widehat{A}y$ με κέντρο Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ (π.χ. λ = 2), παίρνουμε ένα σημείο Β στην πλευρά Αx, ένα σημείο Γ στην πλευρά Αy και βρίσκουμε τα σημεία Β′, Α′, Γ′ που είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των Β, Α, Γ. Ορίζεται έτσι η γωνία $x'\widehat{A'}y'$, που είναι ομοιόθετη της γωνίας $x\widehat{A}y$.
Αν συγκρίνουμε τις δύο γωνίες διαπιστώνουμε ότι είναι ίσες, δηλαδή $x\widehat{A}y = x'\widehat{A'}y'$. Επομένως

Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.

Το ομοιόθετο πολυγώνου



Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ = 2, το ομοιόθετο ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′, όπου Α′, Β′, Γ′, Δ′ είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ. Οι πλευρές και οι γωνίες του τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ είναι ομοιόθετες με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του ΑΒΓΔ, οπότε ισχύουν:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad \text{και} \quad \widehat{A'} = \widehat{A},\ \ \widehat{B'} = \widehat{B},\ \ \widehat{\Gamma'} = \widehat{\Gamma},\ \ \widehat{\Delta'} = \widehat{\Delta}.$$

Το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο λ = 2 είναι **μεγέθυνση** του ΑΒΓΔ. Αν Α″Β″Γ″Δ″ είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$, ομοίως ισχύουν:

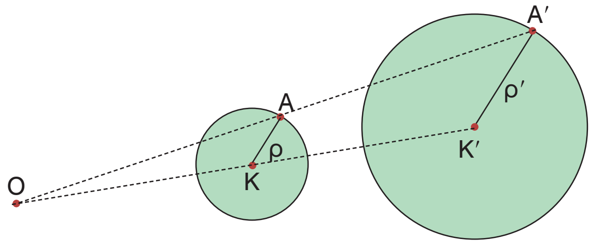
$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} = \frac{\Gamma''\Delta''}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta''A''}{\Delta A} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \widehat{A''} = \widehat{A},\ \ \widehat{B''} = \widehat{B},\ \ \widehat{\Gamma''} = \widehat{\Gamma},\ \ \widehat{\Delta''} = \widehat{\Delta}.$$

Το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι **σμίκρυνση** του ΑΒΓΔ.

Γενικά

- Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Οι αντίστοιχες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- Αν το πολύγωνο Π′ είναι ομοιόθετο του Π με λόγο λ, τότε το Π′ είναι
  - μεγέθυνση του Π, όταν λ > 1
  - σμίκρυνση του Π, όταν 0 < λ < 1 και
  - ίσο με το Π, όταν λ = 1.

Το ομοιόθετο κύκλου



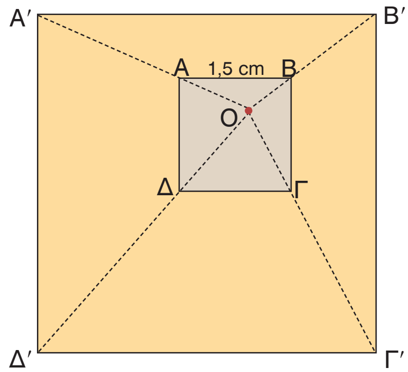
Για να βρούμε το ομοιόθετο ενός κύκλου (Κ, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο έναν θετικό αριθμό λ (π.χ. λ = 2), βρίσκουμε το ομοιόθετο του κέντρου Κ και το ομοιόθετο ενός σημείου Α του κύκλου, που είναι τα σημεία Κ′ και Α′ αντιστοίχως.

Ορίζεται έτσι ένας κύκλος (Κ′, ρ′), όπου ρ′ = Κ′Α′, που είναι ομοιόθετος του κύκλου (Κ, ρ). Το ευθύγραμμο τμήμα Κ′Α′ είναι ομοιόθετο του ΚΑ με κέντρο Ο και λόγο λ = 2, οπότε Κ′Α′ = 2 • ΚΑ, δηλαδή ρ′ = 2ρ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Με κέντρο ομοιοθεσίας ένα εσωτερικό σημείο Ο τετραγώνου ΑΒΓΔ, πλευράς 1,5 cm και λόγο λ = 3, να σχεδιαστεί το ομοιόθετό του και να αποδειχτεί ότι είναι τετράγωνο.**

Λύση



Στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ παίρνουμε αντιστοίχως τα τμήματα ΟΑ′ = 3 • ΟΑ, ΟΒ′ = 3 • ΟΒ, ΟΓ′ = 3 • ΟΓ, ΟΔ′ = 3 • ΟΔ.
Το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο λ = 3,

οπότε: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \dfrac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\Delta'A'}{\Delta A} = 3$.

Άρα, Α′Β′ = 3 • ΑΒ = 3 • 1,5 = 4,5 cm.
Ομοίως έχουμε Β′Γ′ = Γ′Δ′ = Δ′Α′ = 4,5 cm

Επειδή τα ομοιόθετα σχήματα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες του ίσες, το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ θα έχει τις γωνίες του ορθές. Επομένως το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ είναι τετράγωνο, αφού έχει τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές. Άρα

Το ομοιόθετο ενός τετραγώνου είναι τετράγωνο.

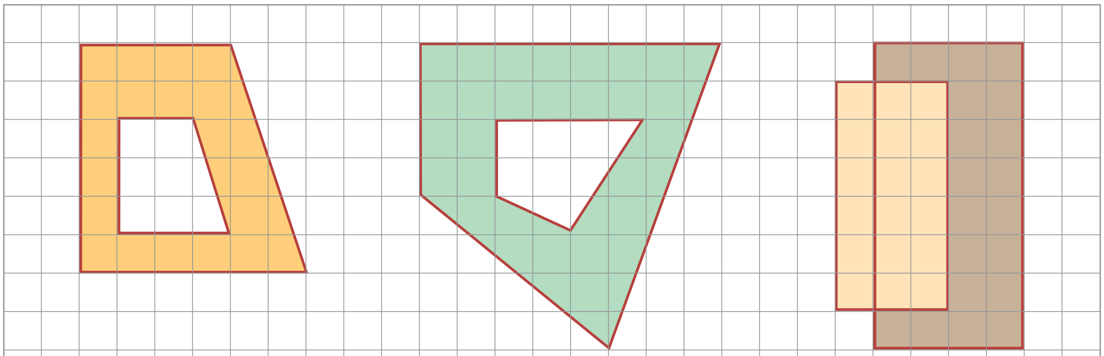
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.
Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο

α) λ = 5 το ομοιόθετο του Α είναι το .... β) λ = 2 το ομοιόθετο του Β είναι το ....

γ) $\lambda = \dfrac{1}{3}$ το ομοιόθετο του Γ είναι το .... δ) $\lambda = \dfrac{3}{5}$ το ομοιόθετο του Ε είναι το ....

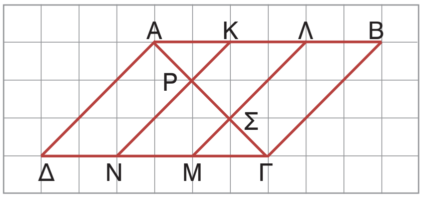
2 Σε ποια από τα παρακάτω σχήματα τα πολύγωνα είναι ομοιόθετα;



(Σχ. 1) (Σχ. 2) (Σχ. 3)

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ευθύγραμμο τμήμα	Κέντρο ομοιοθεσίας	Λόγος ομοιοθεσίας	Ομοιόθετο τμήματος
ΚΡ	Α	3	
ΡΝ	Γ		ΣΜ
ΣΜ			ΑΔ
ΒΓ	Α		ΚΡ
ΒΛ	Β	3	



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

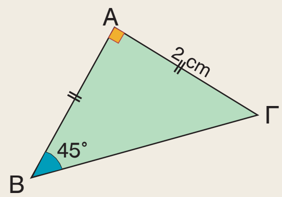
1 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 3 cm.

α) Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο: i) $\lambda = \frac{1}{2}$ ii) $\lambda = 2$.

β) Να υπολογίσετε τις πλευρές των τετραγώνων που σχεδιάσατε.

2 Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με κάθετες πλευρές ΑΒ = 12 cm και ΑΓ = 9 cm. Με κέντρο την κορυφή Α και λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$ να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε τις πλευρές του.

3 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο Ο εκτός του τριγώνου και λόγο $\lambda = 3$.
Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του νέου τριγώνου.



4 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο ενός κύκλου (Ο, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο $\lambda = 3$. Να αποδείξετε ότι ο νέος κύκλος θα έχει τριπλάσιο μήκος και εννεαπλάσιο εμβαδόν.

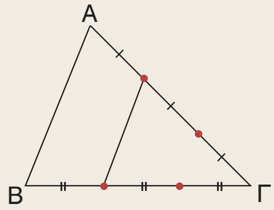
5 Να τοποθετήσετε στο σχήμα τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αν γνωρίζετε ότι:

– Το Κ είναι ομοιόθετο του Α με κέντρο Γ και λόγο $\frac{1}{3}$.

– Το Α είναι ομοιόθετο του Λ με κέντρο Κ και λόγο 2.

– Το ΛΜ είναι ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο Γ και λόγο $\frac{2}{3}$.

– Το ΑΒ είναι ομοιόθετο του ΚΝ με κέντρο Γ και λόγο 3.



6 Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο 2 και κέντρο ομοιοθεσίας:

α) το σημείο Κ β) το σημείο Α γ) ένα εξωτερικό σημείο του παραλληλογράμμου.

Να συγκρίνετε τα τρία ομοιόθετα σχήματα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

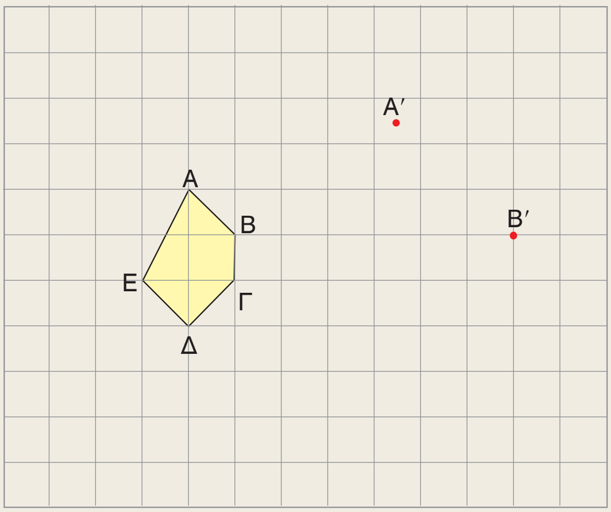
7 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να πάρετε τα σημεία Α(–1, 1), Β(2, 2) και Γ(0, –2).

α) Να σχεδιάσετε τρίγωνο Α′Β′Γ′ ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda = 2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Με ποια σχέση συνδέονται οι συντεταγμένες των κορυφών των δύο τριγώνων;

β) Να σχεδιάσετε τρίγωνο Α″Β″Γ″ ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο το σημείο Κ(1, 1), λόγο $\lambda = 2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Ισχύει η ανάλογη σχέση για τις συντεταγμένες των κορυφών αυτών των τριγώνων;

8 Στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ να ορίσετε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι ΔΕ // ΒΓ και $ΔΕ = \frac{1}{3}ΒΓ$.

9 Να κατασκευάσετε το ομοιόθετο του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ στην ομοιοθεσία κατά την οποία τα σημεία Α′, Β′ είναι ομοιόθετα των κορυφών Α, Β αντιστοίχως.



1.5 Ομοιότητα

Μαθαίνω πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια.
Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια.

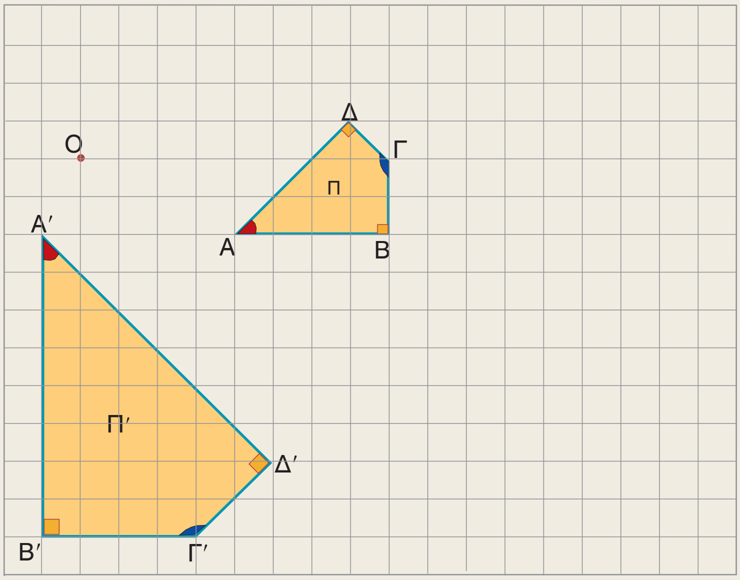
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο διπλανό σχήμα, οι πλευρές του τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ (ή Π′) έχουν διπλάσιο μέγεθος από τις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (ή Π) και οι αντίστοιχες γωνίες των τετραπλεύρων είναι ίσες.

1. Να σχεδιάσετε το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ (ή Π″) που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = 2$.

2. Να συγκρίνετε το τετράπλευρο που σχεδιάσατε με το Π′.

3. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα αρχικά τετράπλευρα Π και Π′;



Α Όμοια πολύγωνα

Αν έχουμε δύο ομοιόθετα πολύγωνα, τότε το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα. Δύο πολύγωνα Π και Π′ που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα τα λέμε **όμοια** και συμβολίζουμε $\Pi \approx \Pi'$. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.

Αν όμως ένα πολύγωνο Π′, δεν είναι ομοιόθετο του Π ή δεν είναι εύκολο να εξηγήσουμε ότι είναι ομοιόθετο του Π, τότε πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι όμοιό του;

Ας πάρουμε δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ (ή Π) και Α′Β′Γ′Δ′ (ή Π′), ώστε οι πλευρές του Π′ να είναι διπλάσιες των πλευρών του Π και οι αντίστοιχες γωνίες τους να είναι ίσες. Αν σχεδιάσουμε ένα τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ (ή Π″) ομοιόθετο του Π με λόγο $\lambda = 2$, τότε τα τετράπλευρα Π′ και Π″ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους ίσες. Το Π″ ως ομοιόθετο του Π, με λόγο 2 είναι μεγέθυνση του, άρα και το ίσο του πολυγώνο Π′ είναι μεγέθυνση του Π, οπότε τα τετράπλευρα Π και Π′ είναι όμοια.

Το ίδιο θα συνέβαινε αν το Π′ ήταν σμίκρυνση του Π.

Τα αρχικά τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ τα σχεδιάσαμε, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \hat{A}' = \hat{A},\ \hat{B}' = \hat{B},\ \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma},\ \hat{\Delta}' = \hat{\Delta} \quad (2)$$

και διαπιστώσαμε ότι είναι όμοια.

Γενικά **Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.**

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο $\left(\text{π.χ. } \frac{A'B'}{AB} = 2\right)$, γι' αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας**.

Είδαμε λοιπόν ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν είναι ή μπορεί να γίνουν ομοιόθετα και επομένως θα ισχύουν και γι' αυτά οι ιδιότητες των ομοιοθέτων σχημάτων, δηλαδή:

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Από τη σχέση (1) και γνωστή ιδιότητα των αναλογιών έχουμε:

$$\lambda = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = \frac{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'A'}{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A} = \frac{\text{περίμετρος } \Pi'}{\text{περίμετρος } \Pi}.$$ Άρα

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

Λόγος ομοιότητας – Κλίμακα

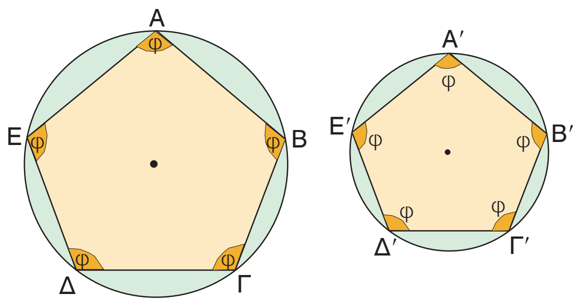
Οι χάρτες συνήθως παρουσιάζουν μια γεωγραφική περιοχή σε σμίκρυνση, δηλαδή παρουσιάζουν ένα σχήμα όμοιο με το πραγματικό. Το μέγεθος της σμίκρυνσης καθορίζεται από την κλίμακα του χάρτη που αναγράφεται πάνω σ' αυτόν. Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στον χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.

Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 2000000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στον χάρτη προς το πραγματικό είναι $\lambda = \frac{1}{2000000}$, οπότε 1 cm στον χάρτη είναι 20 km στην πραγματικότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να αποδειχτεί ότι δύο κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια.

Λύση



Οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Άρα τα κανονικά πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α′Β′Γ′Δ′Ε′ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

αφού και οι αριθμητές και οι παρονομαστές είναι μεταξύ τους ίσοι.

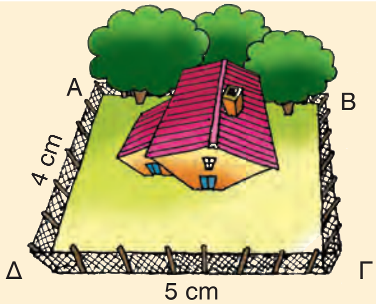
Τα κανονικά πεντάγωνα έχουν και τις γωνίες τους ίσες εφόσον καθεμιά από αυτές είναι $\varphi = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Άρα τα κανονικά πεντάγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε είναι όμοια.

Γενικά

Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

2 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αεροφωτογραφία ενός αγροκτήματος που έχει σχήμα ορθογωνίου και έχει περιφραχτεί με συρματόπλεγμα μήκους 270 m. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος. Με ποια κλίμακα έχει φωτογραφηθεί το αγρόκτημα;



Λύση

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ της αεροφωτογραφίας είναι σμίκρυνση του πραγματικού αγροκτήματος Α′Β′Γ′Δ′, οπότε είναι όμοιο προς αυτό.

Άρα ισχύει $\dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \dfrac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = λ$ (1).

Ο λόγος ομοιότητας λ είναι ίσος με τον λόγο των περιμέτρων τους.

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι $2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 18$ cm, ενώ του Α′Β′Γ′Δ′ είναι ίση με το μήκος του συρματοπλέγματος, δηλαδή 270 m ή 27000 cm.

Άρα $λ = \dfrac{18}{27000} = \dfrac{1}{1500}$ οπότε $\dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \dfrac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = \dfrac{1}{1500}$.

Επομένως έχουμε:

$Α'Δ' = 1500 \cdot ΑΔ = 1500 \cdot 4 = 6000$ cm ή $Α'Δ' = 60$ m.

$Δ'Γ' = 1500 \cdot ΔΓ = 1500 \cdot 5 = 7500$ cm ή $Δ'Γ' = 75$ m.

Δηλαδή, οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος είναι 60 m και 75 m. Η κλίμακα φωτογράφισης είναι ίση με τον λόγο ομοιότητας $λ = \dfrac{1}{1500}$ δηλαδή 1 : 1500.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο τετράγωνα είναι όμοια. ☐

β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια. ☐

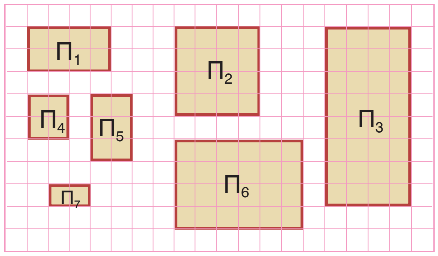
γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια. ☐

δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια. ☐

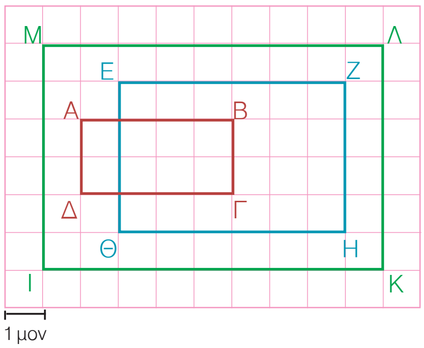
ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια. ☐

στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια. ☐

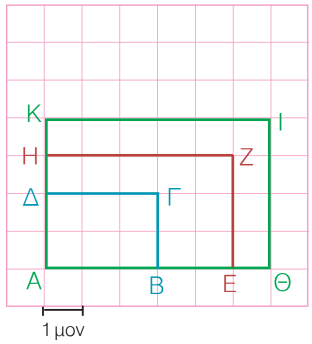
2 Ποια από τα πολύγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια;



3 Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις διαστάσεις των αντιστοίχων παραλληλογράμμων και να βρείτε ποια απ' αυτά είναι όμοια.

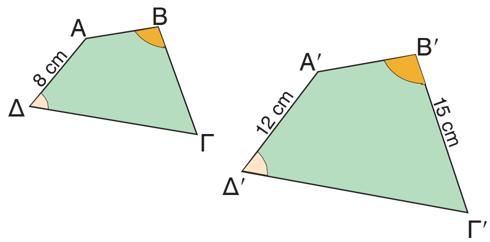


	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΕΖΗΘ		
ΙΚΛΜ		



	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΑΕΖΗ		
ΑΘΙΚ		

4 Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τις προτάσεις:



α) Ο λόγος ομοιότητας του ΑΒΓΔ προς το Α′Β′Γ′Δ′ είναι ....

β) Ο λόγος ομοιότητας του Α′Β′Γ′Δ′ προς το ΑΒΓΔ είναι ....

γ) Αν η γωνία $\widehat{B}$ είναι 110°, τότε και η γωνία .... είναι 110°.

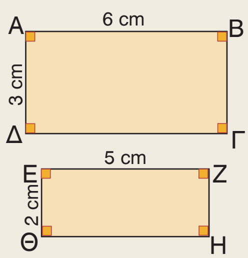
δ) Ο λόγος $\lambda = \dfrac{Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Δ' + Δ'Α'}{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}$ είναι ίσος με ....

ε) Η πλευρά ΒΓ είναι ίση με .... cm.

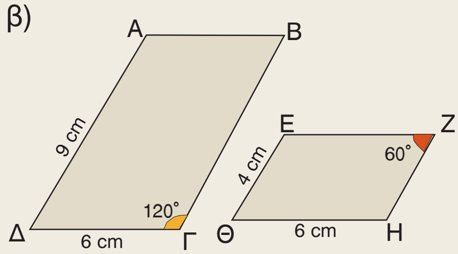
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

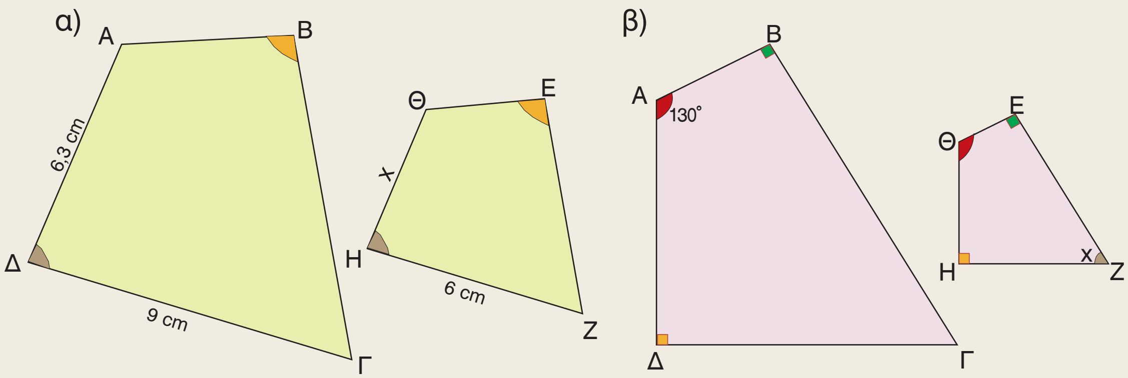
α)



β)



2 Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια, να βρείτε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:



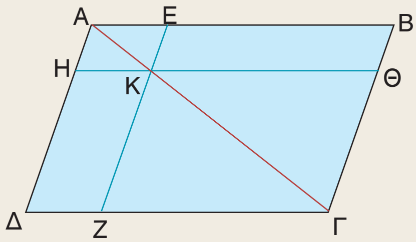
3 Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 24 cm και 18 cm. Ένας μαθητής θέλοντας να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο όμοιο μ' αυτό αλλά που να έχει τη μεγαλύτερη πλευρά 20 cm, σκέφτηκε να μειώσει και την άλλη πλευρά κατά 4 cm. Ήταν σωστή η σκέψη του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4 Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που προκύπτει αν ενώσουμε τα μέσα των ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ είναι παραλληλόγραμμο όμοιο με το ΑΒΓΔ.

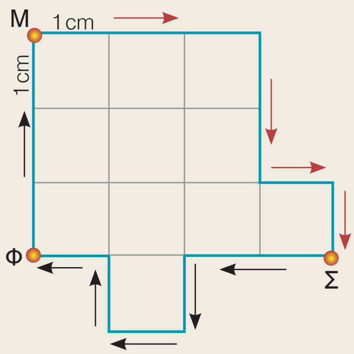
5 Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΚ $= \frac{1}{4}$ΑΓ, ΕΖ // ΑΔ και ΗΘ // ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.

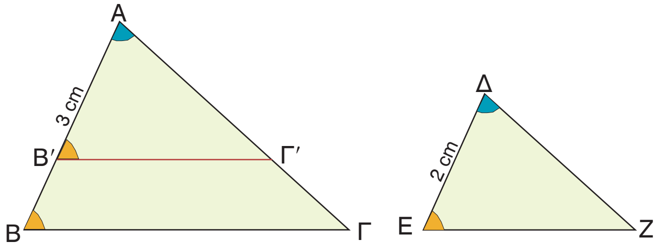
β) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΚΘΓΖ.



6 Ένας μαθητής ξεκίνησε το πρωί από το σπίτι του Μ και αφού ακολούθησε τη διαδρομή που φαίνεται στο σχέδιο, έφτασε στο σχολείο του Σ. Το μεσημέρι επέστρεψε σπίτι του από άλλο δρόμο προκειμένου να περάσει και από το σπίτι ενός φίλου του που βρισκόταν στο σημείο Φ. Αν η συνολική διαδρομή που έκανε ο μαθητής ήταν 640 m, να βρείτε πόσο απέχουν τα σπίτια των δύο φίλων. Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου;



Β Όμοια τρίγωνα



Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, όπως και δύο πολύγωνα, είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Δηλαδή αν έχουν $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ}$ και $\hat{Α} = \hat{Δ}$, $\hat{Β} = \hat{Ε}$, $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$.

Για να είναι λοιπόν δύο τρίγωνα όμοια πρέπει να ισχύουν όλες οι προηγούμενες ισότητες; Ευτυχώς όχι.
Για παράδειγμα, ας πάρουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ που έχουν δύο γωνίες τους ίσες ($\hat{Α} = \hat{Δ}$ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$).
Αν τοποθετήσουμε το τρίγωνο ΔΕΖ πάνω στο ΑΒΓ, ώστε η γωνία $\hat{Δ}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{Α}$, τότε η πλευρά ΕΖ θα συμπέσει με τη Β′Γ′ και οι γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Β}'$ θα είναι ίσες. Άρα Β′Γ′ // ΒΓ και από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΓ} = \frac{2}{3} \quad ή \quad ΑΒ' = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ \quad και \quad ΑΓ' = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒ′Γ′ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ στην ομοιοθεσία με κέντρο Α και λόγο $\frac{2}{3}$, οπότε ΑΒ′Γ′ ≈ ΑΒΓ. Επειδή τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒ′Γ′ είναι ίσα, θα είναι και ΔΕΖ ≈ ΑΒΓ.
Επομένως

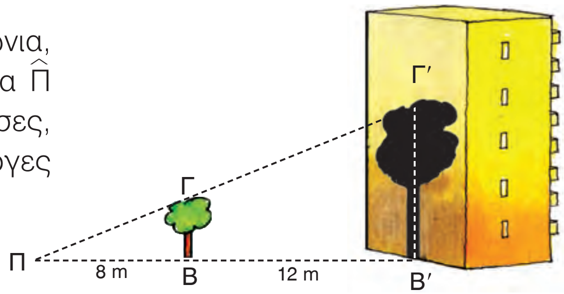
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Είδαμε λοιπόν, ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Ένας προβολέας Π βρίσκεται στο έδαφος και φωτίζει ένα δέντρο ΒΓ. Η σκιά του δέντρου στο απέναντι κτίριο φτάνει μέχρι την οροφή του 4ου ορόφου. Αν το ισόγειο και κάθε όροφος έχουν ύψος 3 m και η απόσταση του δέντρου από τον προβολέα είναι 8 m, ενώ από το κτίριο είναι 12 m, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

Λύση



Τα τρίγωνα ΠΒΓ και ΠΒ′Γ′ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{Β} = \hat{Β}' = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\hat{Π}$ κοινή. Επομένως, έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΠΒ}{ΠΒ'} \quad (1).$$

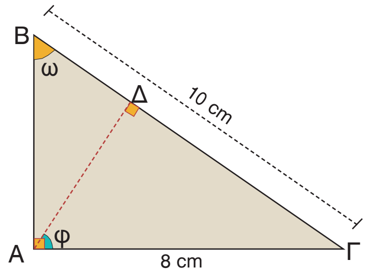
Η σκιά καλύπτει το ισόγειο και 4 ορόφους, οπότε θα έχει ύψος Β′Γ′ $= 5 \cdot 3 = 15$ m. Άρα η ισότητα *(1)* γίνεται $\dfrac{ΒΓ}{15} = \dfrac{8}{8+12}$ ή $20 \cdot ΒΓ = 120$, οπότε το ύψος του δέντρου είναι ΒΓ $= 6$ m.

2 **Σ’ ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm και ΑΓ = 8 cm να χαραχθεί το ύψος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια και να γραφούν οι ίσοι λόγοι. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΓ και ΔΒ.**

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια, αφού $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\widehat{Γ}$ κοινή. Δηλαδή, έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

Ίσες γωνίες	$\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^\circ$	$\widehat{Γ}$ κοινή	$\widehat{ω} = \widehat{φ}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ



Άρα έχουμε $\dfrac{ΒΓ}{ΑΓ} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΔΓ}$ *(1).*

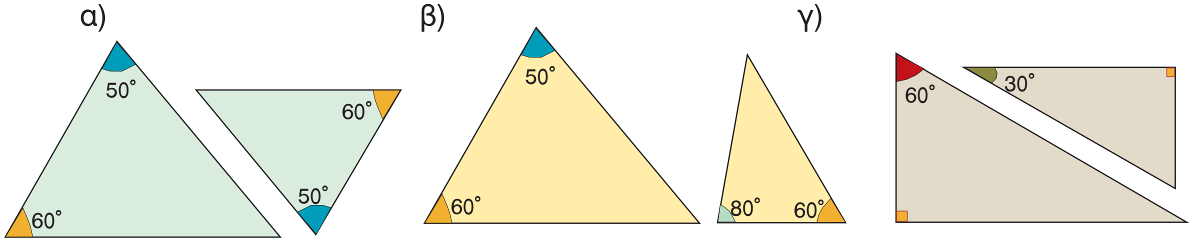
Από τις ισότητες (1) έχουμε $\dfrac{ΒΓ}{ΑΓ} = \dfrac{ΑΓ}{ΔΓ}$ ή $\dfrac{10}{8} = \dfrac{8}{ΔΓ}$.

Άρα $10 \cdot ΔΓ = 64$, οπότε ΔΓ $= 6{,}4$ cm. Επειδή ΒΓ $= 10$ cm και ΔΓ $= 6{,}4$ cm έχουμε ΒΔ $= 10 - 6{,}4$ δηλαδή ΒΔ $= 3{,}6$ cm.

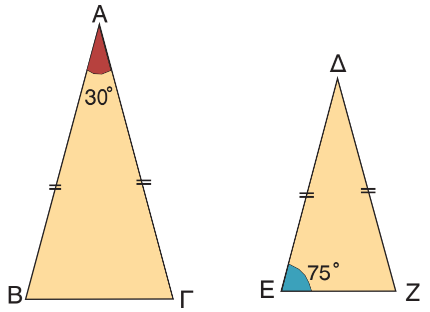
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια;

α) β) γ)

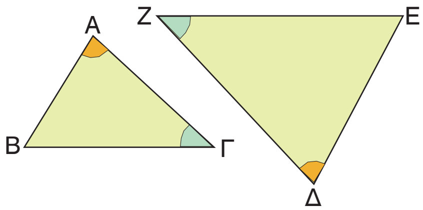


2 Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια.

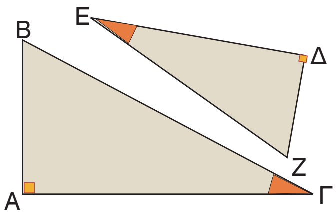


3 Να γράψετε τους ίσους λόγους στα παρακάτω ζεύγη των ομοίων τριγώνων.

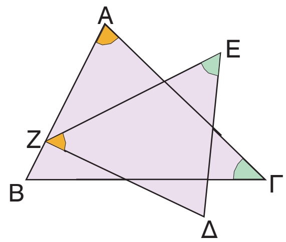
α)



β)



γ)



— = — = — — = — = — — = — = —

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια. ☐

β) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια. ☐

γ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. ☐

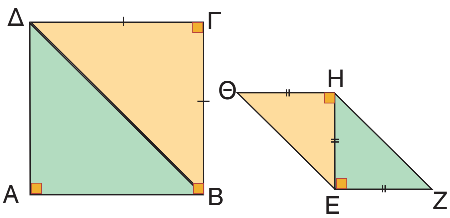
δ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια. ☐

ε) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μία γωνία 40°, είναι όμοια. ☐

στ) Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων τριγώνων, είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους. ☐

5 α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΖΗ είναι όμοια.

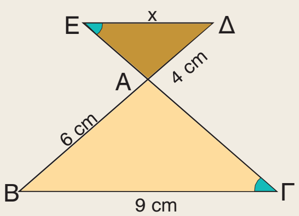
β) Αν δύο πολύγωνα αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό ομοίων τριγώνων, είναι πάντοτε όμοια;



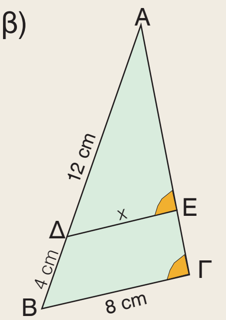
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

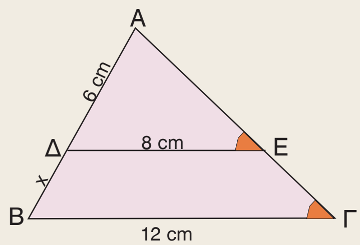
α)



β)



γ)



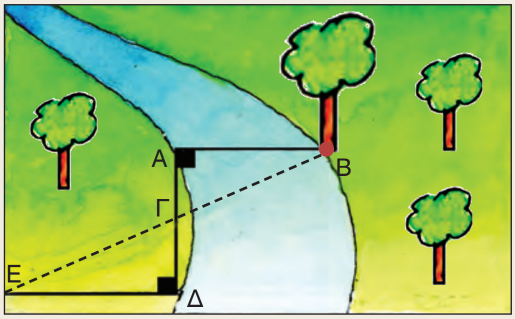
2 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι όμοια. Αν ΔΒ = 4 cm και ΔΓ = 9 cm, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

3 Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 8 cm και ΑΓ = 12 cm ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ και Ε, ώστε ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 3 cm. Να αποδείξετε ότι:

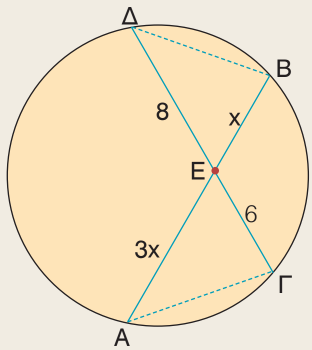
α) ΔΕ // ΒΓ

β) τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια.

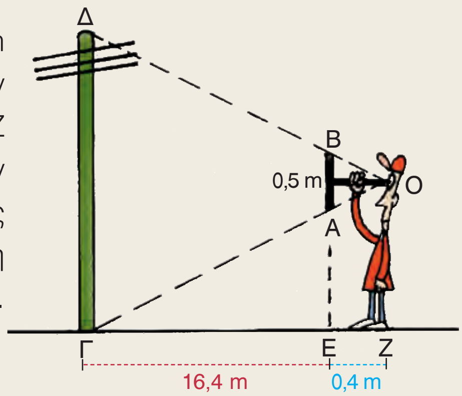
4 Να βρείτε το πλάτος ΑΒ του ποταμού, αν ΑΓ = 12 m, ΓΔ = 15 m, ΕΔ = 60 m και $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$.



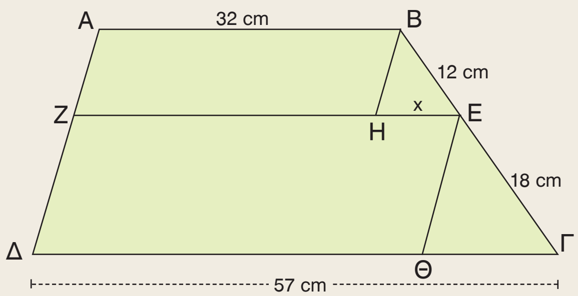
5 Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ, ΒΕΔ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.



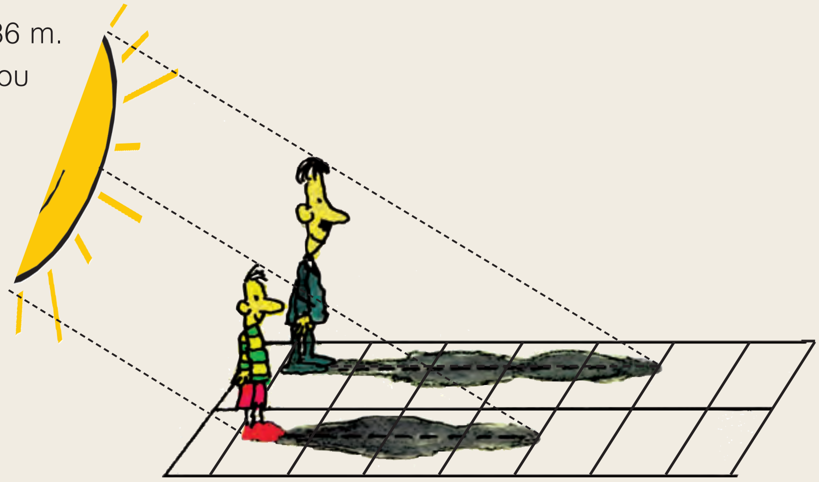
6 Μπροστά στο μάτι μας και σε απόσταση 0,4 m κρατάμε κατακόρυφα ένα ραβδί ΑΒ = 0,5 m. Αν μετακινηθούμε και σταθούμε σε ένα σημείο Ζ τέτοιο, ώστε οι ευθείες ΟΑ, ΟΒ να καταλήγουν στη βάση και στην κορυφή της κεραίας ενός ραδιοφωνικού σταθμού, διαπιστώνουμε ότι η απόστασή μας από την κεραία είναι ΓΖ = 16,8 m. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας;



7 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΕΖ // ΔΓ, ΒΗ // ΑΔ και ΕΘ // ΑΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΗΕ, ΕΘΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.



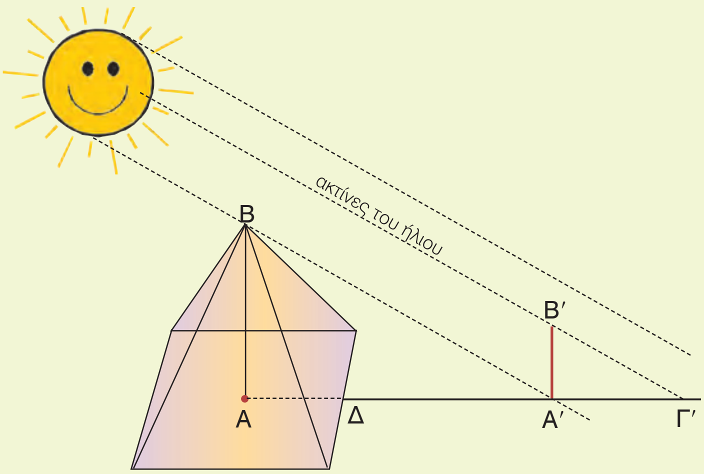
8 Ο γιος έχει ύψος 1,36 m. Ποιο είναι το ύψος του πατέρα του;



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7ου αιώνα π.Χ. Με τη βοήθεια της θεωρίας αυτής ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624 - 547 π.Χ.), ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της, αποσπώντας το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου, του Άμασι.

Δε γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σ' αυτό το επίτευγμά του. Ο Πλούταρχος, ωστόσο, μας διηγείται τα εξής:



«Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δύο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ο ίδιος με τον λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

Ο Διογένης ο Λαέρτιος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι ο Θαλής μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν το μήκος της ράβδου έγινε ίσο με το μήκος της σκιάς της.

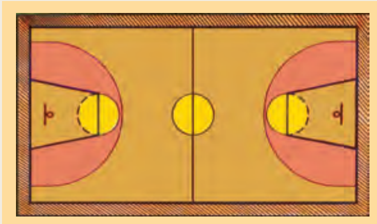
Μπορείτε να εξηγήσετε, πώς ο Θαλής υπολόγισε τελικά το ύψος της πυραμίδας, αφού μπορούσε να μετρήσει το μήκος της πλευράς της τετραγωνικής βάσης της πυραμίδας και της σκιάς ΔΑ′;

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

Μαθαίνω τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά ομοίων πολυγώνων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε ένα γήπεδο μπάσκετ με κλίμακα 1 : 50. Το σχέδιο είχε διαστάσεις 60 cm x 30 cm.



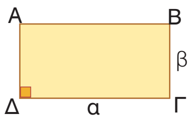
1. Να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου.
2. Να υπολογίσετε τον λόγο του εμβαδού του σχεδίου προς το αντίστοιχο εμβαδό του γηπέδου.
3. Να συγκρίνετε τον λόγο που βρήκατε με το τετράγωνο της κλίμακας του σχεδίου.

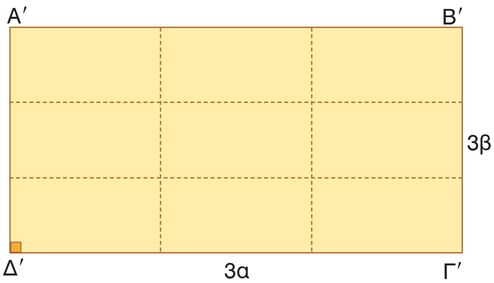
Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α, β. Αν σχεδιάσουμε και το ορθογώνιο Α′Β′Γ′Δ′ με τριπλάσιες διαστάσεις, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι όμοιο προς το αρχικό με λόγο ομοιότητας $\lambda = 3$. Τα εμβαδά Ε′, Ε των δύο ορθογωνίων είναι:

$$E' = 3\alpha \cdot 3\beta \quad \text{και} \quad E = \alpha \cdot \beta$$

οπότε ο λόγος τους είναι:

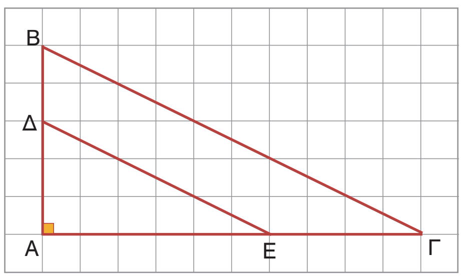
$$\frac{E'}{E} = \frac{3\alpha \cdot 3\beta}{\alpha \cdot \beta} = 3^2$$





Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ο λόγος των εμβαδών των ομοίων αυτών ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Ομοίως, αν στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ πάρουμε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε $ΑΔ = \frac{3}{5}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{3}{5}ΑΓ$, τότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ, που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας Α και λόγο $\frac{3}{5}$. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{5}$.



Για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των ομοίων αυτών τριγώνων ισχύει:

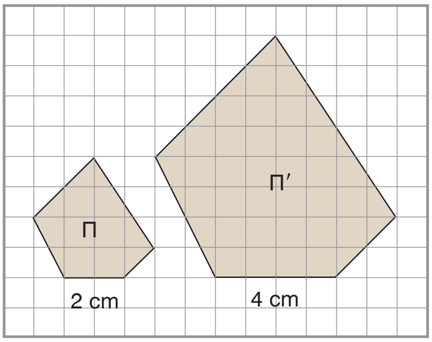
$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot ΑΔ \cdot ΑΕ}{\frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος των εμβαδών των ομοίων τριγώνων ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι και πάλι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Γενικά

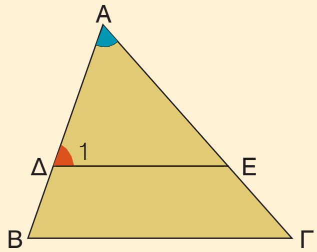
Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο (Π) είναι όμοιο με το πολύγωνο (Π′) και δύο ομόλογες πλευρές τους είναι 2 cm και 4 cm αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας του (Π) προς το (Π′) είναι $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, οπότε για τα εμβαδά τους Ε και Ε′ ισχύει $\frac{E}{E'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 18 cm², να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΕΓΒ.



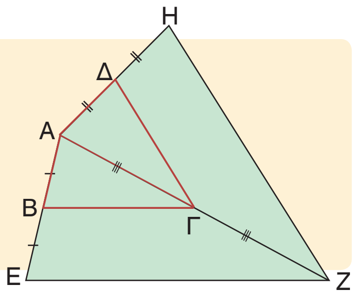
Λύση

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$, γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Δηλαδή, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$. Άρα για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) ισχύει

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ ή } \frac{(ΑΔΕ)}{18} = \frac{4}{9} \text{ ή } (ΑΔΕ) = 8 \text{ cm}^2.$$

Το τραπέζιο ΔΕΓΒ έχει εμβαδόν (ΔΕΓΒ) = 18 cm² – 8 cm² = 10 cm².

2 Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κατά ίσα τμήματα και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΕΖΗ. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΖΗ από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ;



Λύση

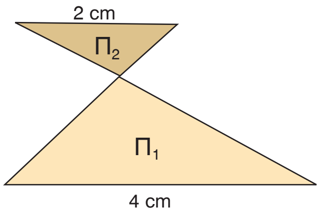
Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο 2.

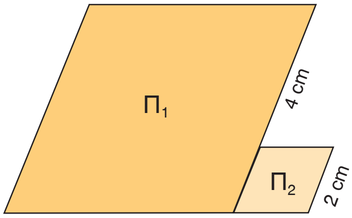
Άρα ΑΕΖΗ ≈ ΑΒΓΔ, οπότε $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΕΖΗ)} = \left(\frac{ΑΒ}{ΑΕ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

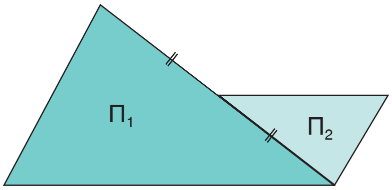
Επομένως, (ΑΕΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ), δηλαδή το τετράπλευρο ΑΕΖΗ έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν τα πολύγωνα $Π_1$, $Π_2$ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά τους $Ε_1$, $Ε_2$.







$Ε_1 = ...Ε_2$ $\qquad$ $Ε_1 = ...Ε_2$ $\qquad$ $Ε_1 = ...Ε_2$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν τριπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

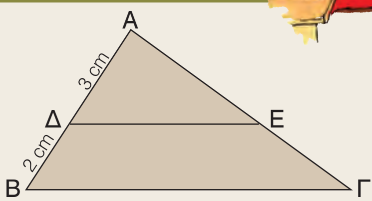
β) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

γ) Αν ένας ρόμβος έχει πλευρά 6 cm και ένας άλλος όμοιός του ρόμβος έχει πλευρά 3 cm, τότε ο δεύτερος ρόμβος έχει εμβαδόν .... φορές μικρότερο από το εμβαδόν του πρώτου ρόμβου.

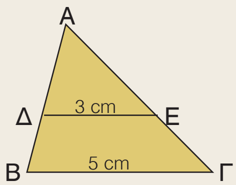
3 Ένα ορθογώνιο $Π_1$ είναι όμοιο με το ορθογώνιο $Π_2$ με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$.
Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του $Π_1$ είναι το 16% του εμβαδού του $Π_2$. Έχει δίκιο;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ.
Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$



2 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ.
Αν το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν 18 cm^2, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

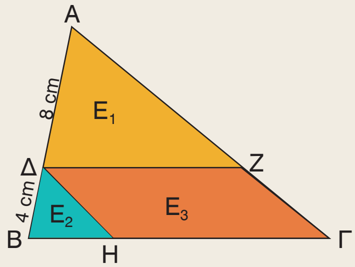


3 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 1 cm και ΓΔ = 5 cm, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Να υπολογίσετε πόσες φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

4 Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως, τότε να υπολογίσετε τους λόγους:

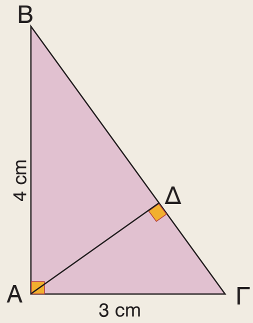
α) $\dfrac{(\text{ΑΖΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ β) $\dfrac{(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}$

5 Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, ΔΖ // ΒΓ και ΔΗ // ΑΓ, τότε να αποδείξετε ότι για τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 ισχύουν: $E_1 = \dfrac{4}{9}E$, $E_2 = \dfrac{1}{9}E$ και $E_3 = E_1$.



6 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να υπολογίσετε τους λόγους:

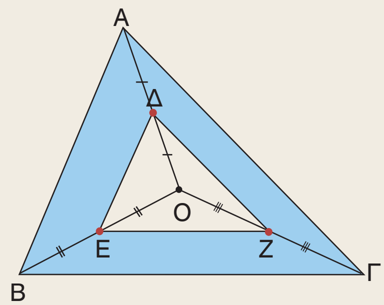
α) $\dfrac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}$ β) $\dfrac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}$



7 Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε τυχαίο σημείο Ο. Αν Δ, Ε, Ζ είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔΕΖ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

β) το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας είναι ίσο με τα $\dfrac{3}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

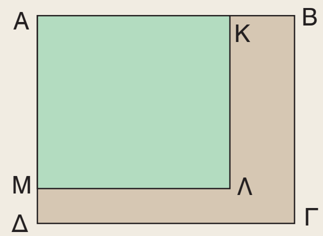


8 Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 40 cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα προκύψει, αν φωτοτυπηθεί:

α) μεγέθυνση 120% β) σμίκρυνση 75%.

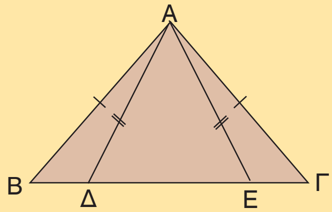
9 Αν κάθε πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 30%, τότε να βρείτε πόσο % θα αυξηθεί το εμβαδόν του.

10 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου οικοπέδου μειώθηκαν κατά 20%, γιατί αυξήθηκε το πλάτος των διπλανών δρόμων. Να βρείτε πόσο % μειώθηκε το εμβαδόν του οικοπέδου.

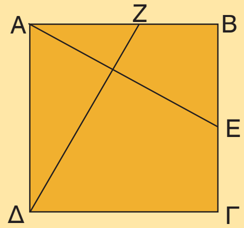


ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελή, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



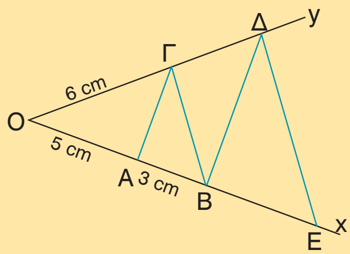
2 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ζ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως, τέτοια ώστε ΑΖ = ΒΕ.
Να αποδείξετε ότι: **α)** ΔΖ = ΑΕ **β)** ΔΖ ⊥ ΑΕ.



3 Σε ευθεία ε να πάρετε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Προς το ίδιο μέρος της ευθείας να κατασκευάσετε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΓΗ. Να αποδείξετε ότι ΑΗ = ΓΖ.

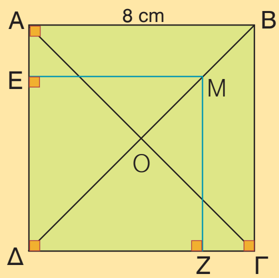
4 Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ΒΓ = Β′Γ′, $\hat{B} = \hat{B}'$ και οι διχοτόμοι ΒΜ και Β′Μ′ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.

5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΒΔ // ΑΓ και ΔΕ // ΓΒ.
α) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΔ και ΟΕ.
β) Να αποδείξετε ότι $ΟΒ^2 = ΟΑ \cdot ΟΕ$.

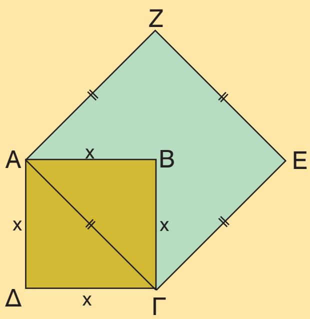


6 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 6 cm. Να βρείτε την πλευρά ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν.

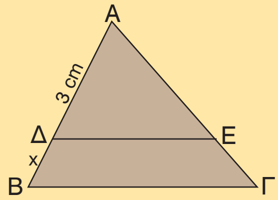
7 Οι διαγώνιοι τετραγώνου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Από το μέσον Μ του ΟΒ να φέρετε ΜΕ ⊥ ΑΔ και ΜΖ ⊥ ΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΜΕΔΖ.



8 Με πλευρά τη διαγώνιο ΑΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς x, να σχηματίσετε το τετράγωνο ΑΓΕΖ.
α) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΓΕΖ)}{(ΑΒΓΔ)}$.
β) Αν (ΑΓΕΖ) = 200 cm^2, να υπολογίσετε την πλευρά x.

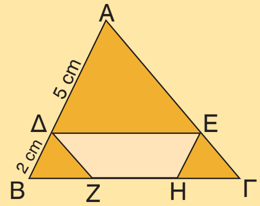


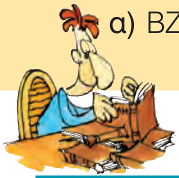
9 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ και $(ΑΔΕ) = \frac{9}{16}(ΑΒΓ)$. Να υπολογίσετε το x.



10 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ, ΔΖ // ΑΓ και ΕΗ // ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ = ΓΗ β) $(ΔΕΗΖ) = \frac{16}{49} \cdot (ΑΒΓ)$





ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

- Ίσα τρίγωνα λέγονται τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Κριτήρια ισότητας τριγώνων. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
  - Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (Π – Γ – Π).
  - Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Γ – Π – Γ).
  - Τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π – Π – Π).
- Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
  - Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.
  - Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Β. ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ – ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

- Παράλληλες ευθείες, αν ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
- Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $ΓΔ = λ \cdot ΑΒ$.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$.
- Θεώρημα Θαλή. Τρεις ή περισσότερες ευθείες, αν τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

Γ. ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ – ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

- Ομοιόθετο ενός σημείου Α ως προς το κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται το σημείο Α′ της ημιευθείας ΟΑ για το οποίο ισχύει $ΟΑ' = λ \cdot ΟΑ$.
- Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.
- Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.
- Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Όμοια πολύγωνα λέγονται τα πολύγωνα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.
- Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και αντιστρόφως.
- Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.
- Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:
  - Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.
  - Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

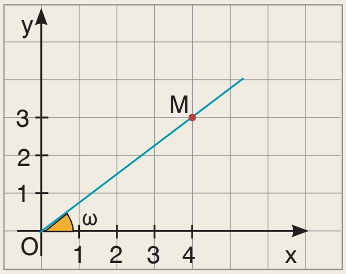
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

Θυμάμαι πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.
Γνωρίζω πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.
Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέραμε την ημιευθεία OM, που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ω.



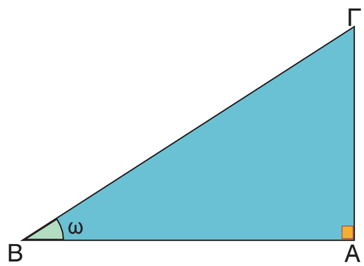
1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου M και να υπολογίσετε την απόσταση του M από την αρχή O.
2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

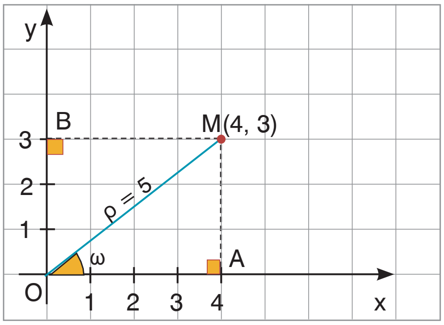
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρουμε το σημείο M(4, 3) και φέρουμε $MA \perp x'x$ και $MB \perp y'y$, τότε έχουμε $OA = 4$ και $OB = AM = 3$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση $\rho = OM$ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα

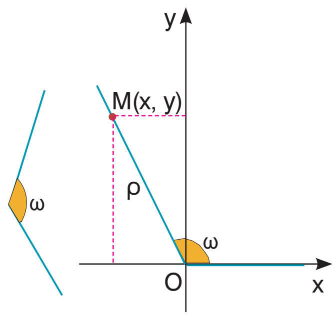


$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.



Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y), διαφορετικό από το O, τότε για την απόσταση ρ = OM ισχύει

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$\text{ημω} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{\rho}$$

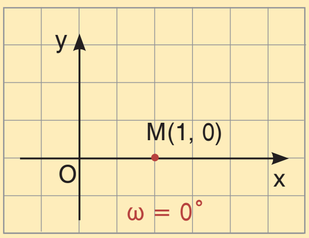
$$\text{συνω} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

- **Αν η γωνία ω είναι οξεία**, τότε είναι $x>0$, $y>0$, $\rho>0$, οπότε: **ημω>0, συνω>0, εφω>0**.
- **Αν η γωνία ω είναι αμβλεία**, τότε είναι $x<0$, $y>0$, $\rho>0$, οπότε: **ημω>0, συνω<0, εφω<0**.

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 90^\circ$ ή $\omega = 180^\circ$.
Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0°, 90° και 180°.

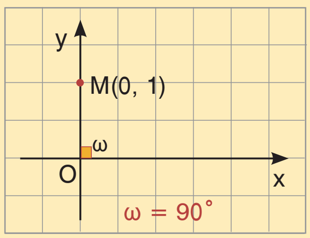


Αν M σημείο του ημιάξονα Ox
π.χ. το M(1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 0^\circ$
και ρ=OM=1. Άρα:

$$\text{ημ}0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{συν}0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{εφ}0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

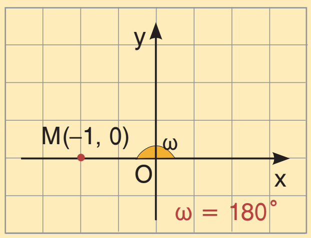


Αν M σημείο του ημιάξονα Oy
π.χ. το M(0,1), τότε $\omega = x\hat{O}M = 90^\circ$
και ρ=OM=1. Άρα:

$$\text{ημ}90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{συν}90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

εφ90° δεν ορίζεται
(γιατί x=0)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox′
π.χ. το M(–1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 180^\circ$
και ρ=OM=1. Άρα:

$$\text{ημ}180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{συν}180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{εφ}180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

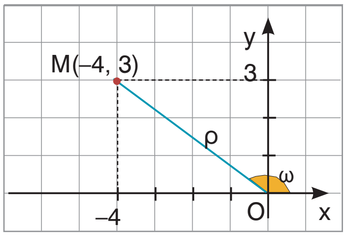
Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30°, 45° και 60° που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

ω	30°	45°	60°
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο M(–4, 3). Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

Λύση



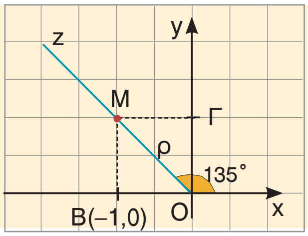
Για την απόσταση OM = ρ έχουμε:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

Άρα: $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$

και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $x\hat{O}z = 135°$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο M με τετμημένη –1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}M = 135°$.



Λύση

Φέρουμε MB ⊥ x′x και MΓ ⊥ y′y. Επειδή $x\hat{O}M = 135°$ και $x\hat{O}y = 90°$ θα είναι $\Gamma\hat{O}M = 45°$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο OMΓ είναι και ισοσκελές.

Άρα OΓ = MΓ = OB = 1 και η τεταγμένη του σημείου M είναι y = 1.

Δηλαδή έχουμε M(–1, 1) και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Άρα $\eta\mu 135° = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 135° = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\varepsilon\varphi 135° = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Για το σημείο M(5, 12) είναι ρ = OM = 13. Αν $\omega = x\hat{O}M$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

ημω = ...   συνω = ...   εφω = ...

2 Αν η γωνία $ω = x\hat{O}M$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο $>$ ή $<$.

ημω ... 0 συνω ... 0 εφω ... 0

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $ημ90^\circ$	
β. $συν180^\circ$	1. 0
γ. $εφ0^\circ$	
δ. $συν90^\circ$	2. –1
ε. $ημ0^\circ$	
στ. $εφ180^\circ$	3. 1
ζ. $συν0^\circ$	
η. $ημ180^\circ$	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq συνω \leq 1$.

β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $εφω < 0$.

γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει $ημω > 0$, τότε η ω είναι οξεία.

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $ω = x\hat{O}M$, όταν:

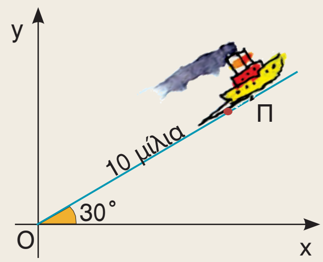
α) Μ(3, 4) β) Μ(–5, 12) γ) Μ(0, 3)

2 Μια ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -2x$.

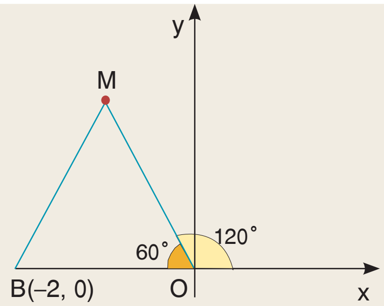
α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της Μ που έχει τετμημένη –1.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $ω = x\hat{O}M$.

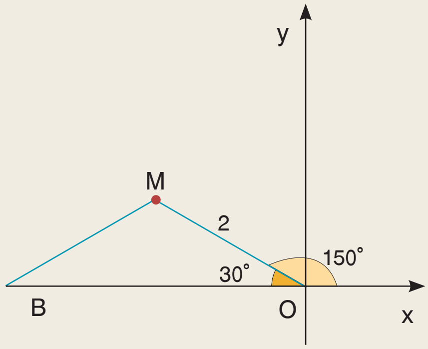
3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα Οx γωνία 30°. Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



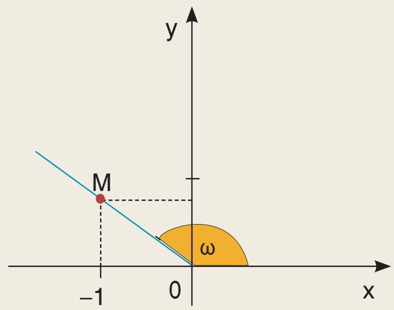
4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισόπλευρο.
Να υπολογίσετε:
α) τις συντεταγμένες του Μ.
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120˚.



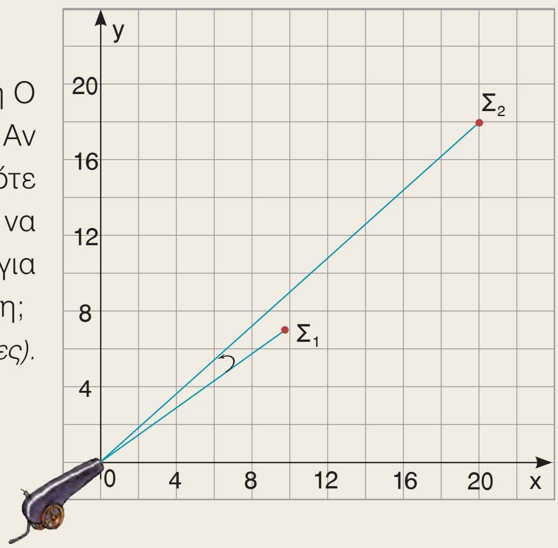
5 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισοσκελές.
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Μ είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150˚.



6 Στο διπλανό σχήμα είναι εφω $= -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι –1, τότε να υπολογίσετε:
α) την τεταγμένη του σημείου Μ.
β) το ημω και το συνω.



7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση Ο και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο $Σ_1$. Αν ο στόχος $Σ_1$ μετακινηθεί στη θέση $Σ_2$, τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση;
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Γνωρίζω ποια σχέση συνδέει:
Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών.
Τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy να πάρετε το σημείο Μ(3, 4).

1. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Μ′, που είναι συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα y′y;

2. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $x\hat{O}M = \omega$ και $x\hat{O}M' = \varphi$ είναι παραπληρωματικές.

3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ και τη σχέση που τους συνδέει.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy παίρνουμε το σημείο Μ(3, 4) και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο Μ′(–3, 4) ως προς τον άξονα y′y.

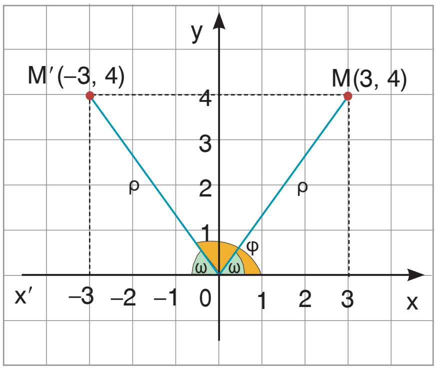
Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $x\hat{O}M$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $x'\hat{O}M' = \omega$, οπότε για τη γωνία $\varphi = x\hat{O}M'$ ισχύει $\varphi = 180^\circ - \omega$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού $\omega + \varphi = 180^\circ$.

Έχουμε ακόμη ότι

$\rho = OM = OM' = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, οπότε:

$$\eta\mu\omega = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{5}, \quad \varepsilon\varphi\varphi = -\frac{4}{3}.$$



Παρατηρούμε λοιπόν, ότι:

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω, φ = 180° – ω έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γενικά

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° – ω ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

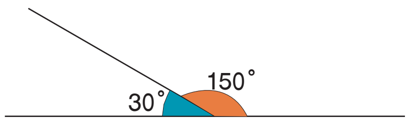
Με τους προηγούμενους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.

Για παράδειγμα,

$$\eta\mu150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi150^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\varepsilon\varphi30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150° και 30°, αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο. Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180°, τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν $ημx = ημ35^\circ$ και $0 \leq x \leq 180^\circ$, τότε είναι $x = 35^\circ$ ή $x = 180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή $x = 35^\circ$ ή $x = 145^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $Α = ημ140^\circ + συν170^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ$.

Λύση

Οι γωνίες 140° και 40° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή είναι $ημ140^\circ = ημ40^\circ$.

Οι γωνίες 170° και 10° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή είναι $συν170^\circ = -συν10^\circ$. Άρα:

$Α = ημ140^\circ + συν170^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ = ημ40^\circ - συν10^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ = 0$.

2 Αν $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ με $\widehat{Α} = 80^\circ$ και $\widehat{Β} = 70^\circ$ να αποδειχθεί ότι: α) $ημ(Α + Β) = ημΓ$ β) $συν(Α + Β) = -συνΓ$

Λύση

Οι γωνίες $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$ του τριγώνου έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή είναι:

$80^\circ + 70^\circ + \widehat{Γ} = 180^\circ$, οπότε $\widehat{Γ} = 30^\circ$. Άρα:

α) $ημ(Α + Β) = ημ(80^\circ + 70^\circ) = ημ150^\circ = ημ(180^\circ - 30^\circ) = ημ30^\circ = ημΓ$.

β) $συν(Α + Β) = συν(80^\circ + 70^\circ) = συν150^\circ = συν(180^\circ - 30^\circ) = -συν30^\circ = -συνΓ$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $ημ150^\circ = ημ30^\circ$	☐	β) $συν135^\circ = συν45^\circ$	☐
γ) $εφ100^\circ = εφ80^\circ$	☐	δ) $εφ75^\circ = -εφ105^\circ$	☐
ε) $συν110^\circ = -συν70^\circ$	☐	στ) $ημ140^\circ = -ημ40^\circ$	☐

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $ημx = ημ60^\circ$, τότε $x =$ ....

β) Αν $συνx = -συν20^\circ$, τότε $x =$ ....

γ) Αν $εφx = -εφ30^\circ$, τότε $x =$ ....

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $ημ140°$	1. $ημ40°$ 2. $συν40°$
β. $συν140°$	3. $εφ40°$ 4. $-ημ40°$
γ. $εφ140°$	5. $-συν40°$ 6. $-εφ40°$

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) $120°$ β) $135°$ γ) $150°$

2 Να αποδείξετε ότι:
α) $ημ108° + συν77° - ημ72° + συν103° = 0$
β) $εφ122° - εφ58° \cdot εφ135° = 0$

3 Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2 45° + συν^2 135° = 1$ β) $ημ^2 30° + ημ^2 60° + ημ^2 120° + ημ^2 150° = 2$

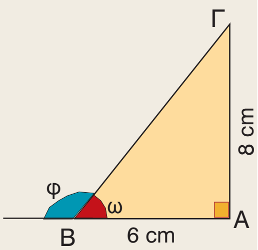
4 Να αποδείξετε ότι: $ημ(140° + x) = ημ(40° - x)$ και $συν(158° - x) = -συν(22° + x)$.

5 Να βρείτε τη γωνία x, όταν:
α) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $ημx = 1 - ημx$ γ) $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$
δ) $συνx = -\frac{1}{2}$ ε) $εφx = -\sqrt{3}$ στ) $2εφx = 1 + εφx$

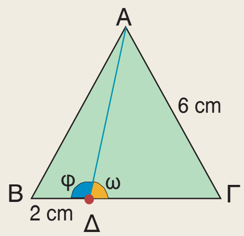
6 Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών του;

7 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{Β} = \widehat{Δ} = 90°$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ημΑ + συνΑ - ημΓ + συνΓ = 0$ β) $εφΑ + εφΓ = 0$

8 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



9 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και μαθαίνω πώς αποδεικνύονται.
Χρησιμοποιώ τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για την απόδειξη άλλων απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

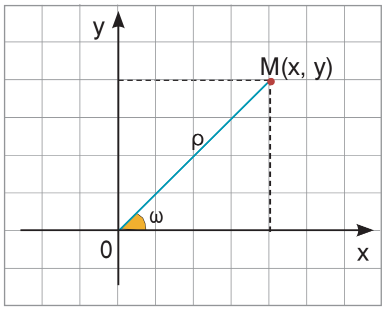
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε ένα σημείο Μ στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο με όποιες συντεταγμένες θέλετε.

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $ω = x\hat{O}M$.
2. Να υπολογίσετε την παράσταση $(ημω)^2 + (συνω)^2$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τα αποτελέσματα που βρήκαν οι συμμαθητές σας.
3. Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{ημω}{συνω}$ και να τον συγκρίνετε με την εφω.

Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση ρ ενός σημείου Μ(x, y) από την αρχή των αξόνων ισχύει

$$ρ = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } ρ^2 = x^2 + y^2.$$



Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $ρ^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{ρ^2}{ρ^2} = \frac{x^2}{ρ^2} + \frac{y^2}{ρ^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 = 1 \quad (1).$$

Επειδή $ημω = \dfrac{y}{ρ}$ και $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, η ισότητα *(1)* γίνεται

$$(συνω)^2 + (ημω)^2 = 1 \text{ ή συντομότερα } ημ^2ω + συν^2ω = 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\boxed{ημ^2ω + συν^2ω = 1}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $ημω = \dfrac{y}{ρ}$ και $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, με την προϋπόθεση ότι $συνω \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} \text{ ή } \frac{ημω}{συνω} = \frac{yρ}{xρ} \text{ ή } \frac{ημω}{συνω} = \frac{y}{x} = εφω$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $συνω \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{εφω = \frac{ημω}{συνω}}$$

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**, γιατί με τη βοήθειά τους αποδεικνύουμε και άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Λύση

Από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε

$συν^2ω = 1 - ημ^2ω$ ή $συν^2ω = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25}$ ή $συν^2ω = \frac{16}{25}$ ή $συνω = \pm\frac{4}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε $συνω < 0$, οπότε $συνω = -\frac{4}{5}$.

Από την ταυτότητα $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ έχουμε $εφω = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$, οπότε $εφω = -\frac{3}{4}$.

2 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $εφω = 2$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Λύση

Έχουμε $εφω = 2$ δηλαδή $\frac{ημω}{συνω} = 2$, οπότε $ημω = 2συνω$ *(1)*.

Αν στην ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ αντικαταστήσουμε το ημω με το 2συνω έχουμε

$(2συνω)^2 + συν^2ω = 1$ ή $4συν^2ω + συν^2ω = 1$ ή $5συν^2ω = 1$ ή $συν^2ω = \frac{1}{5}$,

άρα $συνω = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ ή $συνω = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι οξεία έχουμε $συνω > 0$, οπότε $συνω = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Από την ισότητα *(1)* έχουμε $ημω = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$ ή $ημω = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3 Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = 1$ β) $1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$

Λύση

α) Έχουμε

$(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = ημ^2x - 2ημxσυνx + συν^2x + 2ημxσυνx = ημ^2x + συν^2x = 1$

β) Έχουμε

$1 + εφ^2ω = 1 + \left(\frac{ημω}{συνω}\right)^2 = 1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $ημ^2ω = \frac{3}{5}$, τότε $συν^2ω = \frac{2}{5}$. ☐

β) Αν $συνω = 0$, τότε δεν ορίζεται η εφω. ☐

γ) Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημ^2ω = συν^2ω - 1$. ☐

δ) Αν $ημω = \frac{5}{13}$ και $συνω = \frac{12}{13}$, τότε $εφω = \frac{5}{12}$ ☐

2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $ημω = 0$ και $συνω = 0$. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $ημω = 1$, τότε $συνω =$ ....

β) Αν $ημω = 0$, τότε $συνω =$ ....

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $ημω = \frac{3}{5}$, τότε το συνω είναι ίσο με:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{4}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ ή $-\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$ ή $-\frac{4}{5}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

2 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $συνω = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

3 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $εφω = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

4 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{1}{3}ημω + \frac{2}{3}συνω - \frac{1}{10}εφω.$$

5 Να αποδείξετε ότι:

α) $ημ^3ω + ημωσυν^2ω = ημω$ β) $συν^2ω - συν^4ω = ημ^2ωσυν^2ω$

6 Αν είναι $x = 3συνω$ και $y = 3ημω$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xσυνω + yημω = 3$ β) $x^2 + y^2 = 9$

7 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1$ β) $ημ^2ασυν^2β + ημ^2αημ^2β + συν^2α = 1$

8 Να αποδείξετε ότι:

α) $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 = 2$

β) $(αημω + βσυνω)^2 + (βημω - ασυνω)^2 = α^2 + β^2$

9 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2x\, εφ^2x + συν^2x = 1$ β) $\dfrac{ημx + συνx}{1 + εφx} = συνx$

10 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{συν^2x}{1 + ημx} = 1 - ημx$ β) $εφx + \dfrac{συνx}{1 + ημx} = \dfrac{1}{συνx}$

11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $ημ50^\circ ημ130^\circ - συν50^\circ συν130^\circ$

β) $ημ^2 14^\circ + ημ^2 114^\circ + συν^2 166^\circ + συν^2 66^\circ$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $εφ70^\circ συν70^\circ - εφ110^\circ συν110^\circ = 0$

β) $εφ^2 40^\circ συν^2 40^\circ + συν^2 140^\circ = 1$

13 Αν είναι $α = 30^\circ$ και $β = 60^\circ$, τότε να αποδείξετε ότι:

$ημ^2x\, ημα\, ημβ + συν^2x\, συνα\, συνβ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΙΝΙΓΜΑ

14 Είναι γωνία, όχι οξεία,

ημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{λ + 1}{λ + 3}$ και

συνημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{-2λ\sqrt{3}}{λ + 3}$.

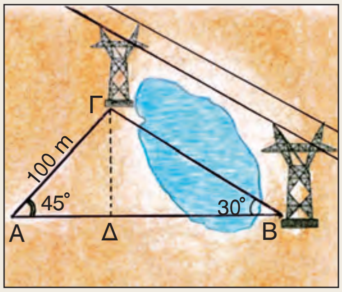
Ποια γωνία είναι;

2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

Γνωρίζω τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και μαθαίνω να τους εφαρμόζω στη λύση προβλημάτων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση ΓΒ δύο πυλώνων της ΔΕΗ, γιατί ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μια λίμνη. Γι' αυτό επιλέγει μια θέση Α που απέχει 100 m από τον πυλώνα Γ και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο μετράει τις γωνίες $\hat{A} = 45^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

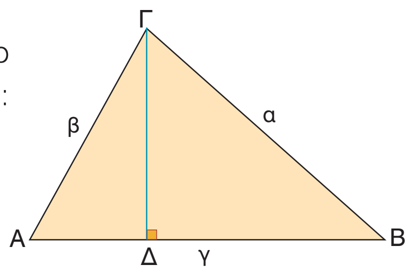


1. Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση ΓΒ, αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση ΓΒ πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι λόγοι $\dfrac{ΓΒ}{ημ45^\circ}$ και $\dfrac{ΓΑ}{ημ30^\circ}$ είναι ίσοι.
2. Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

Α Νόμος των ημιτόνων

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του ή μια πλευρά και μια οξεία γωνία του. Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου όταν δεν είναι ορθογώνιο;

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:



$ημΑ = \dfrac{ΓΔ}{β}$ ή $ΓΔ = βημΑ$ *(1)*

$ημΒ = \dfrac{ΓΔ}{α}$ ή $ΓΔ = αημΒ$ *(2)*

Από τις ισότητες *(1)*, *(2)* έχουμε $βημΑ = αημΒ$ ή $\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ}$.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\boxed{\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ}}$$

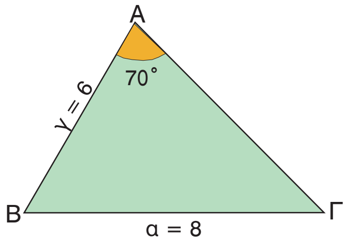
Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των ημιτόνων**.

Γενικά

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με τον νόμο των ημιτόνων, αν γνωρίζουμε μια πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μια άλλη πλευρά ή γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του (πλευρές – γωνίες).

Για παράδειγμα, στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος μπορούμε με τον νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$, αφού



$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \text{ ή } \frac{8}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{6}{\eta\mu\Gamma} \text{ ή } 8\eta\mu\Gamma = 6\eta\mu 70^\circ \text{ ή}$$

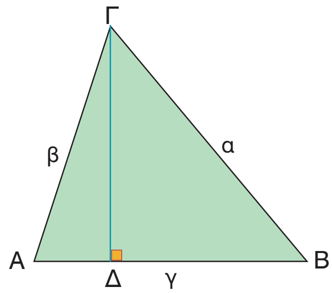
$$\eta\mu\Gamma = \frac{6\eta\mu 70^\circ}{8} \text{ ή } \eta\mu\Gamma = \frac{6 \cdot 0{,}94}{8} \text{ ή } \eta\mu\Gamma = 0{,}705.$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.

Β Νόμος των συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε με τον νόμο των ημιτόνων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου, αφού δε γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι γωνία της.

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$ *(1)*.



Επειδή $\Delta B = \gamma - A\Delta$, η ισότητα *(1)* γράφεται:

$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2$ ή $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + A\Delta^2 - 2\gamma \cdot A\Delta$ *(2)*.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2 \text{ και } \sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{\beta} \text{ ή } A\Delta = \beta\sigma\upsilon\nu A.$$

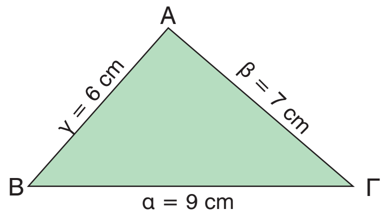
Άρα η ισότητα *(2)* γράφεται: $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}$

Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των συνημιτόνων**.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\boxed{\begin{aligned} \beta^2 &= \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{aligned}}$$

Με τον νόμο των συνημιτόνων, αν σ' ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του.

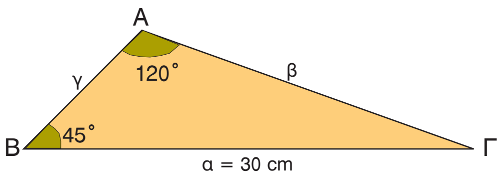


Για παράδειγμα, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 9$ cm, $\beta = 7$ cm και $\gamma = 6$ cm, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.
Π.χ. για να υπολογίσουμε τη γωνία $\widehat{B}$ έχουμε:
$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$ ή
$7^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sigma\upsilon\nu B$ ή
$49 = 36 + 81 - 108 \cdot \sigma\upsilon\nu B$ ή $108\ \sigma\upsilon\nu B = 68$ ή
$\sigma\upsilon\nu B = \frac{68}{108} = 0{,}629$. Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\widehat{B} = 51^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$ και $\alpha = 30$ cm. Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{\Gamma}$ και η πλευρά β.**

Λύση



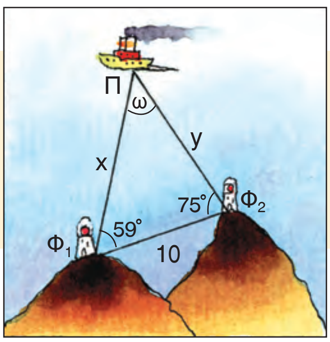
Από τη σχέση $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ έχουμε
$120^\circ + 45^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ ή
$\widehat{\Gamma} = 180^\circ - 165^\circ$ ή $\widehat{\Gamma} = 15^\circ$.
Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad ή \quad \frac{30}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} \quad ή \quad \beta \cdot \eta\mu 120^\circ = 30 \cdot \eta\mu 45^\circ \quad (1).$$

Επειδή $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ η ισότητα *(1)* γράφεται:

$$\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ή \quad \beta = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad ή \quad \beta = \frac{30\sqrt{6}}{3} \quad ή \quad \beta = 10\sqrt{6} \text{ cm}.$$

2 **Δύο φάροι Φ_1, Φ_2 απέχουν μεταξύ τους 10 μίλια. Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε μια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις x, y του πλοίου από κάθε φάρο.**



Λύση

Στο τρίγωνο $\Pi\Phi_1\Phi_2$ έχουμε $\omega + 59^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, οπότε $\omega = 46^\circ$. Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{10}{\eta\mu 46^\circ} = \frac{x}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{y}{\eta\mu 59^\circ}.$$

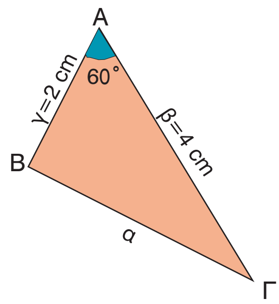
Από την ισότητα $\frac{10}{ημ46^\circ}=\frac{x}{ημ75^\circ}$ έχουμε $x=\frac{10 \cdot ημ75^\circ}{ημ46^\circ}$ ή $x=\frac{10 \cdot 0,966}{0,719}=13,44$ μίλια.

Από την ισότητα $\frac{10}{ημ46^\circ}=\frac{y}{ημ59^\circ}$ έχουμε $y=\frac{10 \cdot ημ59^\circ}{ημ46^\circ}$ ή $y=\frac{10 \cdot 0,857}{0,719}=11,92$ μίλια.

Επομένως το πλοίο Π απέχει από τον φάρο $Φ_1$ 13,44 μίλια και από τον φάρο $Φ_2$ 11,92 μίλια.

3 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $β = 4$ cm και $γ = 2$ cm. Να υπολογιστεί η πλευρά α και οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{Γ}$.**

Λύση



Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνA$ ή $α^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot συν60^\circ$

ή $α^2 = 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2}$ ή $α^2 = 12$.

Άρα $α = \sqrt{12}$ δηλαδή $α = 2\sqrt{3}$ cm.

Ομοίως έχουμε:

$β^2 = γ^2 + α^2 - 2γασυνB$ ή $4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot συνB$ ή

$16 = 4 + 12 - 8\sqrt{3} \cdot συνB$ ή $8\sqrt{3} \cdot συνB = 0$ ή $συνB = 0$, οπότε $\hat{B} = 90^\circ$.

Αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^\circ$ και $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$, έχουμε $\hat{Γ} = 30^\circ$.

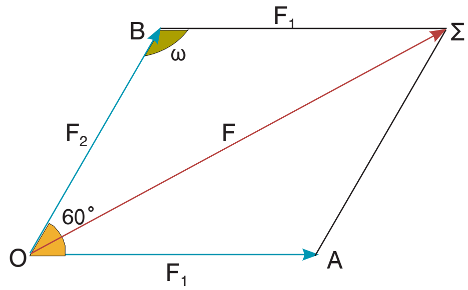
4 **Δύο δυνάμεις $F_1 = 4$ N και $F_2 = 3$ N εφαρμόζονται σ' ένα υλικό σημείο Ο και σχηματίζουν γωνία $ω = 60^\circ$. Να υπολογιστεί η συνισταμένη τους F.**

Λύση

Η συνισταμένη F των δυνάμεων F_1, F_2, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΟΑΣΒ. Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΣ και επειδή $ΒΣ = F_1$, έχουμε:

$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2συνω$ *(1)*.

Οι γωνίες όμως ω και 60° είναι παραπληρωματικές, οπότε $συνω = -συν60^\circ$ και ο τύπος *(1)* γράφεται:

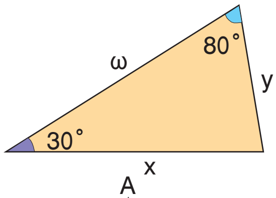


$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συν60^\circ$ ή $F^2 = 4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$ ή $F^2 = 37$, οπότε

$F = \sqrt{37}$ N ή $F = 6,08$ N.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

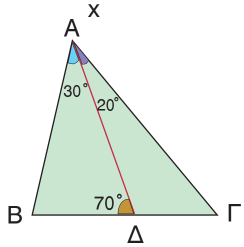
1 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος ____ = ____ = ____



2 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο ΑΒΔ ____ = ____ = ____

β) στο τρίγωνο ΑΔΓ ____ = ____ = ____



3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει αημΒ = βημΑ. ☐

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{\Gamma} = 100°$, τότε $\dfrac{\beta}{\eta\mu 100°} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu 20°}$. ☐

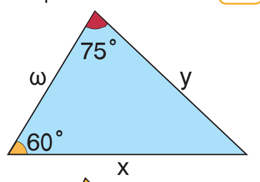
γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$. ☐

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{\Gamma} = 80°$, τότε ισχύει $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80°$. ☐

ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 60°$, τότε ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$. ☐

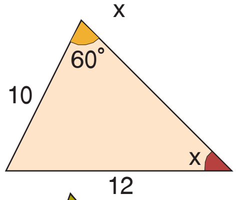
4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων:

x^2 = ... y^2 = ... ω^2 = ...

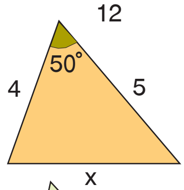


5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

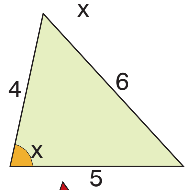
α) Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....



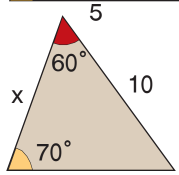
β) Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....



γ) Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....



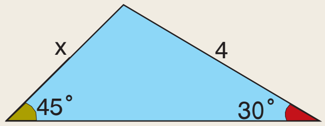
δ) Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....



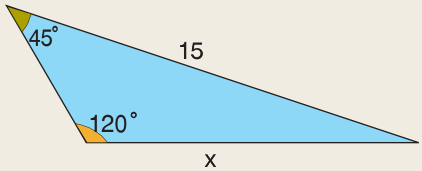
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

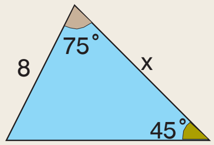
α)



β)

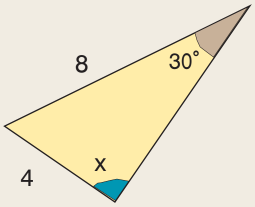


γ)

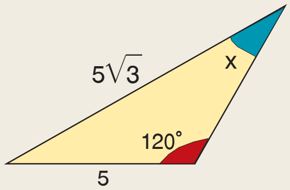


2 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

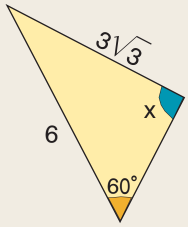
α)



β)



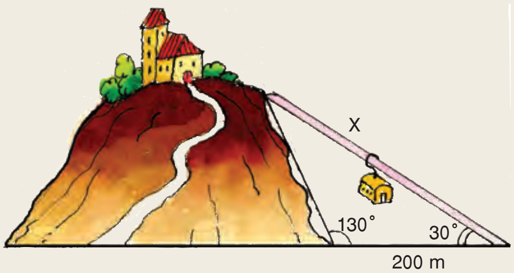
γ)



3 Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, όταν:
α) $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\widehat{B} = 30^\circ$ **β)** $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$.

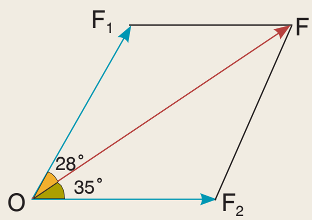
4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{B} = 30^\circ$, $\beta = 10$, $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5 Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής x του εναέριου σιδηροδρόμου στο διπλανό σχήμα. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*

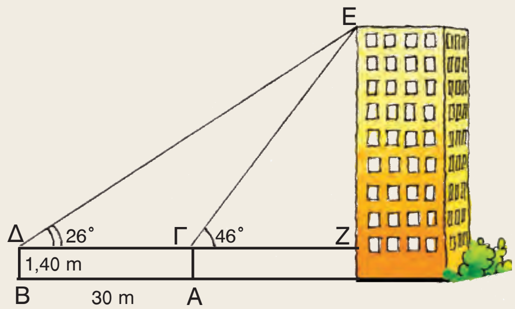


6 Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή του των Μαθηματικών είπε:
– Κύριε, σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $\widehat{B} = 60^\circ$ και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του. Πώς λύνεται;
Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση του είπε:
– Κάποιο λάθος έχεις κάνει, γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.
Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής;

7 Οι δυνάμεις F_1, F_2 έχουν συνισταμένη $F = 10$ N που σχηματίζει με την F_1 γωνία 28° και με την F_2 γωνία 35°. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1, F_2. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*

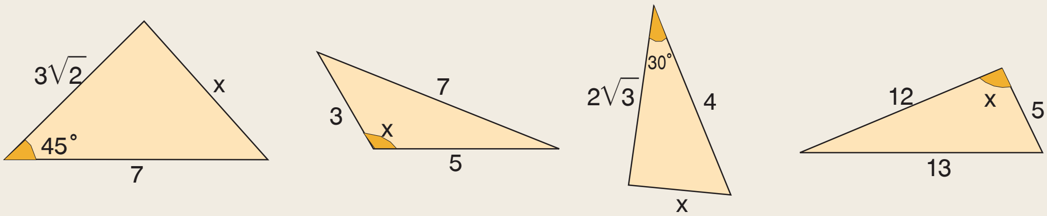


8 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός ψηλού κτιρίου τοποθέτησε το γωνιόμετρό του στο σημείο Α και βρήκε τη γωνία $E\widehat{\Gamma}Z = 46^\circ$. Στη συνέχεια μετακινήθηκε κατά 30 m, τοποθέτησε το γωνιόμετρο στη θέση Β και βρήκε τη γωνία $E\widehat{\Delta}\Gamma = 26^\circ$. Ποιο ήταν το ύψος του κτιρίου, αν το γωνιόμετρο έχει ύψος 1,4 m.
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



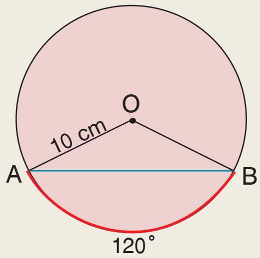
9 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) β) γ) δ)



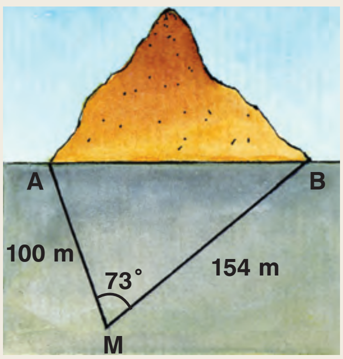
10 Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, αν $\widehat{A} = 120^\circ$ και $\alpha = 3\sqrt{3}$.

11 Σε κύκλο με ακτίνα $R = 10$ cm, η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί σε τόξο 120°. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής.

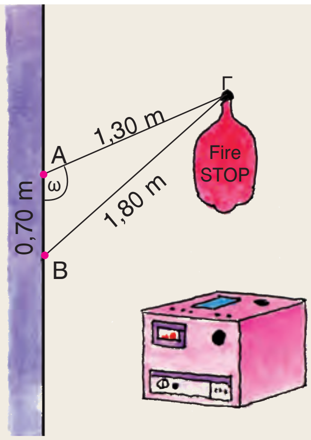


12 Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ=4, ΒΓ=3 και $\widehat{A} = 120^\circ$.

13 Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει μια προσφορά για την κατασκευή μιας σήραγγας ΑΒ. Ένας μηχανικός της εταιρείας με τους συνεργάτες του έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση Μ που η απόσταση του από το Α ήταν 100 m και από το Β ήταν 154 m. Αφού μέτρησε τη γωνία $A\widehat{M}B = 73^\circ$, ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας. Είχε δίκιο ή άδικο; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας; *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



14 Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα ενός καλοριφέρ. Ένας τεχνικός θέλει να κατασκευάσει τη βάση στήριξής του και διαθέτει τρεις μεταλλικές βέργες ΑΒ = 0,70 m, ΑΓ = 1,30 m και ΒΓ = 1,80 m. Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις βέργες ΑΒ, ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω. Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε, ώστε να βοηθήσετε τον τεχνικό; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

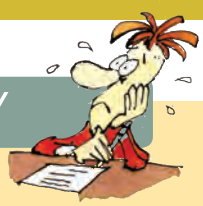


ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων.

Υπολογισμός του ύψους ενός ψηλού κτιρίου, ενός βουνού, της απόστασης δύο υφάλων, δύο φάρων κ.τ.λ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



1 Να αποδείξετε ότι:

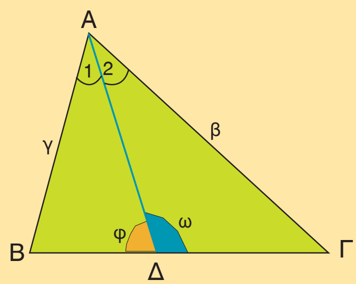
α) $(1 - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1 - \eta\mu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)$ β) $\dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \dfrac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{2}{\eta\mu x}$

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy δίνεται το σημείο Α(4, 0) και το σημείο Μ που έχει τετμημένη –5, τεταγμένη θετική και η απόστασή του από το Ο είναι 13. Αν ω είναι η γωνία $A\hat{O}M$, να υπολογίσετε το συνω και την απόσταση ΑΜ.

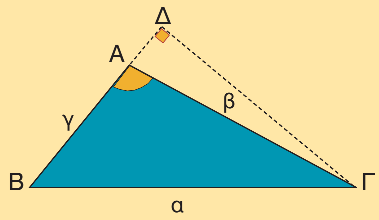
3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 30 cm, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 75^\circ$. Να χαράξετε τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου ΑΔ.

4 Αν ΑΔ διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

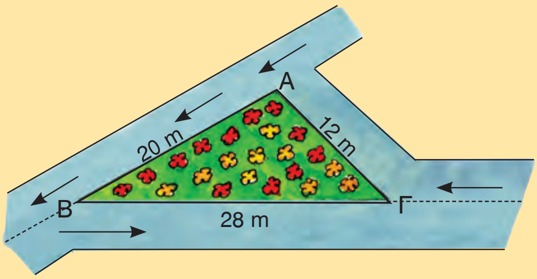
α) $\dfrac{\gamma}{B\Delta} = \dfrac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu A_1}$ β) $\dfrac{\beta}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\eta\mu\omega}{\eta\mu A_2}$ γ) $\dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$



5 α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu A$.



β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A}$ και το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



6 α) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$, τότε να αποδειξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 2$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

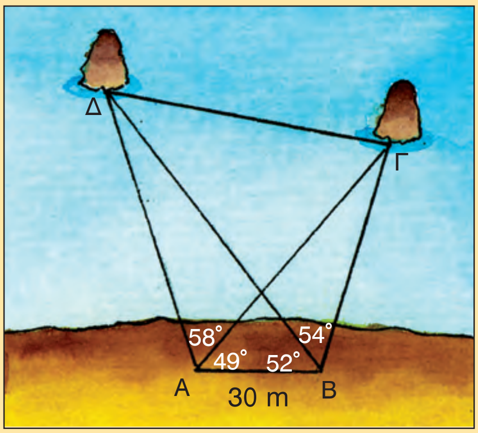
7 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha(\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) + \beta(\eta\mu\Gamma - \eta\mu A) + \gamma(\eta\mu A - \eta\mu B) = 0$ β) $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$

γ) $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu B)$ δ) $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

8 Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{3}{4}$.

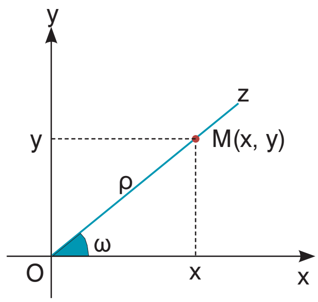
9 Δύο φίλοι τοποθέτησαν τα γωνιόμετρά τους στις θέσεις Α, Β μιας ακτής και παρατήρησαν δύο βράχους που προεξείχαν από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν η απόσταση ΑΒ ήταν 30 m και τα αποτελέσματα των μετρήσεων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα, τότε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο βράχων. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0° \leq ω \leq 180°$**

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, αν είναι $ω = x\hat{O}z$, και M(x, y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της πλευράς Oz, διαφορετικό από το O, τότε:



$$ρ = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } ημω = \frac{y}{ρ},\ συνω = \frac{x}{ρ},\ εφω = \frac{y}{x}.$$

Π.χ. αν M(1, 2), τότε $ρ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$ημω = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad συνω = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad εφω = \frac{2}{1} = 2.$$

- **Τα πρόσημα** των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω με $0° \leq ω \leq 180°$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα:

ω	0°		90°		180°
ημω		+		+	
συνω		+		–	
εφω		+		–	

- **Οι παραπληρωματικές γωνίες** έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$ημ(180° – ω) = ημω$ $\quad$ $συν(180° – ω) = –συνω$ $\quad$ $εφ(180° – ω) = –εφω$

Π.χ. $ημ160° = ημ20°$ $\quad$ $συν160° = –συν20°$ $\quad$ $εφ160° = –εφ20°$

- **Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:**

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω).

$εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω με $συνω \neq 0$)

Π.χ. $ημ^2 35° + συν^2 35° = 1$, $\quad εφ35° = \dfrac{ημ35°}{συν35°}$

- **Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν**

  – Νόμος των ημιτόνων: $\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ}$

  – Νόμος των συνημιτόνων:
  $α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγ\ συνΑ$
  $β^2 = γ^2 + α^2 – 2γα\ συνΒ$
  $γ^2 = α^2 + β^2 – 2αβ\ συνΓ$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,2698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				