Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 3

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.
Δημήτρης Χρήστου-Βαρασκέλης
Καθηγητής

Οκτώβριος 2023

Θέματα 3ης διάλεξης

- Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής
- Ακολουθίες
- Φραγμένες ακολουθίες και μονοτονία
- Σύγκλιση ακολουθιών

Μαθηματική επαγωγή

Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε προτάσεις οι οποίες εξαρτώνται, στην απλούστερη περίπτωση, από μία ακέραια μεταβλητή $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε $P(n)$ την πρόταση αυτή.
Στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ακολουθούμε τα εξής τρία βήματα:

- **Βασικό βήμα**: Δείχνουμε αρχικά την πρόταση για κάποιο $n = n_0$ για το οποίο αποδεικνύουμε ότι ισχύει. Δηλαδή, δείχνουμε ότι το $P(n_0)$ είναι μια αληθής πρόταση.
- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $n = k$ με $k > n_0$. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το $P(k)$ είναι μια αληθής πρόταση.
- **Επαγωγικό βήμα**: Αποδεικνύουμε, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη υπόθεση, ότι το $P(k+1)$ είναι αληθής πρόταση.

Αν ισχύει η συνεπαγωγή στο τελευταίο βήμα, τότε ισχύει και η πρόταση για όλα τα $k \geq n_0$.

Παράδειγμα επαγωγής 1

Να δειχθεί ότι για $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Για $n = 1$ έχουμε $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ το οποίο ισχύει.
- Έστω ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή:
  $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
- Θ.δ.ο. $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
  Από την υπόθεση έχουμε ότι η παραπάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την
  $\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \Leftrightarrow \frac{k^2+k}{2} + k + 1 = \frac{k^2+3k+2}{2} \Leftrightarrow \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$.
  Έτσι δείξαμε με επαγωγή ότι η σχέση ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Παράδειγμα επαγωγής 2

Να δειχθεί ότι $2^n \geq n^3$, για $n \geq 10$.

- Για $n = 10$, $2^n = 1024 \geq 1000 = 10^3$ συνεπώς η αρχική υπόθεση ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για $n = k > 10$, δηλαδή $2^k \geq k^3$.
- Θ.δ.ο. $2^{k+1} \geq (k+1)^3$. Πολλαπλασιάζοντας την επαγωγική υπόθεση με 2 έχουμε ότι $2^{k+1} \geq 2k^3$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $2k^3 \geq (k+1)^3 \Leftrightarrow (2^{\frac{1}{3}}k)^3 \geq (k+1)^3$ $\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{3}}k \geq k+1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}-1} \approx 3.85$ το οποίο ισχύει αφού $k \geq 10$.

Έτσι δείξαμε ότι η σχέση $2^n \geq n^3$ ισχύει για $n \geq 10$.

Παράδειγμα επαγωγής 3

Να δειχθεί ότι η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ είναι $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} n!(x-1)^{-(n+1)}$.

- Για $n = 1$ έχουμε: $f'(x) = (-1)^0 1!(x-1)^{-(1+1)} = (x-1)^{-2}$ που ισχύει αφού $f'(x) = \frac{1(1-x)-x(1-x)'}{(x-1)^2} = \frac{1-x-x(-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$.
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} k!(x-1)^{-(k+1)}$.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$. Έτσι έχουμε $f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(k)}(x)\right]' = \left[(-1)^{k-1} k!(x-1)^{-(k+1)}\right]' = (-1)^{k-1} k!(-(k+1))(x-1)^{-(k+1)-1} = (-1)^k (k+1)!(x-1)^{-(k+2)}$

Έτσι δείξαμε ότι $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} n!(x-1)^{-(n+1)}, n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός της ακολουθίας

Μία σημαντική οικογένεια συναρτήσεων είναι αυτή που αποτελείται από συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ (ή το $\mathbb{N}_\rho = \{\rho, \rho + 1, \rho + 2, \cdots\}$ για κάποιον θετικό ακέραιο ρ). Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται ακολουθίες.

Κάθε συνάρτηση
$\alpha : \mathbb{N} \to E, n \mapsto \alpha(n) \in E$ (ή $\alpha : \mathbb{N}_\rho \to E, n \mapsto \alpha(n) \in E$)
με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (ή το $\mathbb{N}_\rho$) και τιμές σε ένα σύνολο E, λέγεται *ακολουθία στοιχείων του συνόλου* E στο $\mathbb{N}$ (ή στο $\mathbb{N}_\rho$). Ειδικότερα, αν $E \subseteq \mathbb{R}$ η ακολουθία λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Στην παραπάνω αντιστοιχία οι τιμές της ακολουθίας $\alpha : \mathbb{N} \ni n \to \alpha(n) \in \mathbb{R}$, λέγονται *όροι* της ακολουθίας και ο φυσικός αριθμός n λέγεται *δείκτης* ή *τάξη* του όρου $\alpha(n)$ ο οποίος λέγεται και *n-οστός* ή *γενικός όρος* της ακολουθίας.

Χάριν συντομίας και απλότητας, την ακολουθία θα τη συμβολίζουμε με $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή (α_n) και τον $\alpha(n)$ με α_n.

Μορφές αναπαράστασης ακολουθιών πραγματικών αριθμών

Τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε είτε δίνοντας το γενικό όρο:

π.χ. $\alpha_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & n = 2\rho + 1, \rho \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 2\rho, \rho \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ή δίνοντας την αναδρομική σχέση της ακολουθίας και την αρχική τιμή της:
π.χ. $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 5, \alpha_1 = 1.$

Γενική μορφή αναγωγικού τύπου (αναδρομικής σχέσης)

Όταν δίνουμε την αναδρομική σχέση (αναγωγικό τύπο) μίας ακολουθίας πρέπει να δίνονται οι απαραίτητοι πρώτοι όροι και η αναδρομική σχέση να επιτρέπει να βρίσκουμε τον επόμενο όρο α_{n+1} κάθε όρου α_n από τον προηγούμενό του, ή γενικότερα από ορισμένους από τους προηγούμενούς του. Έτσι έχουμε ακολουθίες της μορφής:

$\alpha_1 = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ και $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$

ή γενικότερα της μορφής:

$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = b$ $(\alpha, b \in \mathbb{R})$ και $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n, \alpha_{n-1})$

Φραγμένες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *κάτω φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϕ_κ τέτοιος, ώστε να είναι $\alpha_n \geq \phi_\kappa$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:
(α_n) κάτω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi_\kappa \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq \phi_\kappa$.

Ο αριθμός ϕ_κ (καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός $s < \phi_\kappa$) λέμε ότι είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας.

Φραγμένες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *άνω φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϕ_α τέτοιος, ώστε να είναι $\alpha_n \leq \phi_\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:
(α_n) άνω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi_\alpha \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq \phi_\alpha$.

Ο αριθμός ϕ_α (καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός $s > \phi_\alpha$) λέμε ότι είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας.

Φραγμένες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *φραγμένη* αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\phi_\kappa, \phi_\alpha (\phi_\kappa \leq \phi_\alpha)$ τέτοιοι, ώστε να είναι $\phi_\kappa \leq \alpha_n \leq \phi_\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:

(α_n) φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi_\kappa, \phi_\alpha \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \phi_\kappa \leq \alpha_n \leq \phi_\alpha$.

Φραγμένες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *απολύτως φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϕ, τέτοιος ώστε να ισχύει $|\alpha_n| \leq \phi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:

(α_n) απολύτως φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathbb{R}_+^* : \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq \phi$.
Ο αριθμός ϕ (καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός $s > \phi$), λέμε ότι είναι ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:
(α_n) φραγμένη $\Leftrightarrow$ απολύτως φραγμένη (αρκεί να θεωρήσουμε $\phi = max\{|\phi_\kappa|, |\phi_\alpha|\}$).

Φραγμένες ακολουθίες

Το ελάχιστο άνω φράγμα μιας άνω φραγμένης ακολουθίας (α_n) ονομάζεται supremum της (α_n) και συμβολίζεται με $\sup \alpha_n$.

Το μέγιστο κάτω φράγμα μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας (α_n) ονομάζεται infimum της (α_n) και συμβολίζεται με $\inf \alpha_n$.

Εάν μια ακολουθία (α_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε θεωρούμε ότι $\sup \alpha_n = +\infty$. Ομοίως, εάν μια ακολουθία (α_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε θεωρούμε ότι $\inf \alpha_n = -\infty$.

Παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας

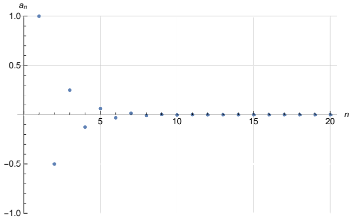
Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = 1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1}$ είναι φραγμένη.

Έχουμε:

$$\alpha_n = 1 + (-\tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (-\tfrac{1}{2})^{n-1} = \frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(1 - (-\tfrac{1}{2})^n).$$

οπότε

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| = \frac{2}{3}|1 - (-\tfrac{1}{2})^n| \leq \frac{2}{3}(1 + |(-\tfrac{1}{2})^n|) = \frac{2}{3}(1 + \tfrac{1}{2^n}) \leq \frac{2}{3}(1 + \tfrac{1}{2}) = 1.$$



Παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας

Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες $\alpha_n = \frac{3n^2-1}{2n^2+1}$ και $b_n = \frac{3n^2+1}{2n^2-1}$ είναι φραγμένες.

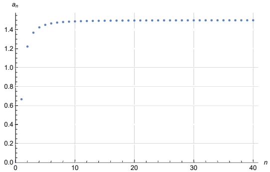
Και οι δύο ακολουθίες είναι θετικές, άρα κάτω φραγμένες από το 0.
Για την α_n έχουμε:

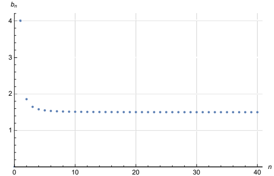
$$\alpha_n = \frac{3n^2-1}{2n^2+1} \leq \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

άρα είναι άνω φραγμένη από το $\frac{3}{2}$.
Για την b_n έχουμε:

$$b_n = \frac{3n^2+1}{2n^2-1} \leq \frac{3n^2+n^2}{2n^2-n^2} = 4,$$

άρα είναι άνω φραγμένη από το 4.





Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *αύξουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) αύξουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$.

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *γνησίως αύξουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *φθίνουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$.

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *γνησίως φθίνουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n > \alpha_{n+1}$.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία (γνησίως) αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται *(γνησίως) μονότονη* ακολουθία.

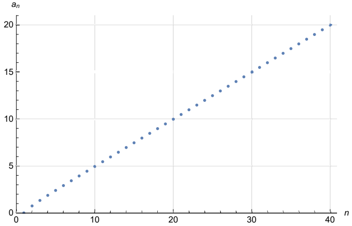
Για να εξετάσουμε ως προς τη μονοτονία μία ακολουθία συνήθως εργαζόμαστε με μία από τις ακόλουθες μεθόδους:
1) Εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς (των διαδοχικών όρων) $\alpha_{n+1} - \alpha_n$
2) Συγκρίνουμε το λόγο (των διαδοχικών όρων) $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ (όταν οι όροι της ακολουθίας διατηρούν πρόσημο).
3) Έχοντας μία ένδειξη της μονοτονίας από την ανισοτική σχέση μεταξύ των πρώτων όρων της ακολουθίας, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής προκειμένου να δείξουμε ότι αυτή ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μονότονες ακολουθίες

Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία $\alpha_n = \frac{n^2-1}{2n}$.

Έχουμε ότι $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)} - \frac{n^2-1}{2n} = \frac{n^2+n+1}{2n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα η α_n είναι γνησίως αύξουσα.

Εναλλακτικά, έχουμε: $\alpha_n = \frac{n^2-1}{2n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = a_{n+1}$.



Υπακολουθίες

Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών (α_n) και μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (s_n). Μπορούμε τότε να ορίσουμε την ακολουθία (b_n) με $b_n = \alpha_{s_n}, n \in \mathbb{N}$. Πρόκειται για την ακολουθία με όρους:

$$\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \cdots, \alpha_{s_n}, \cdots$$

και η οποία λέγεται υπακολουθία της (α_n).

Παράδειγμα: Αν θεωρήσουμε την ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n}$, τότε η υπακολουθία η οποία προκύπτει αν $s_n = 2n$ είναι η $b_n = \alpha_{2n} = \frac{1}{2n}$.

Η έννοια του ορίου

Λέμε ότι η ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο $\alpha \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιος, ώστε να είναι $|\alpha_n - \alpha| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολικά:

$$\lim \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : |\alpha_n - \alpha| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

Η έννοια του ορίου ακολουθίας γεωμετρικά σημαίνει ότι, αν μία ακολουθία συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό α τότε, οποιαδήποτε ϵ-περιοχή του α και αν επιλέξουμε, μετά από κάποιον όρο της ακολουθίας όλοι οι επόμενοι θα βρίσκονται στην περιοχή αυτή, οσοδήποτε μικρή και αν είναι αυτή.

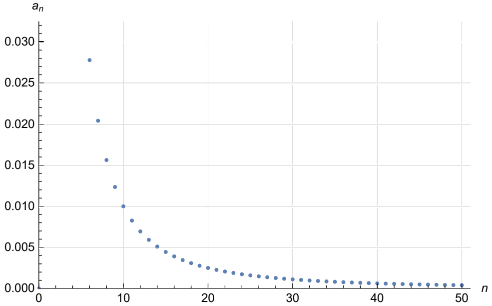
Παράδειγμα απόδειξης ορίου

Η ακολουθία (α_n) με $(\alpha_n) = \frac{1}{n^2}$ έχει όριο το 0 (είναι μηδενική). Με βάση τον ορισμό του ορίου έχουμε:

$|\alpha_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \epsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Leftrightarrow$

$n \geq n_0, n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rfloor + 1$

Άρα $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rfloor + 1 : \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \epsilon, \forall n \geq n_0$



Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Παρατηρούμε ότι η άλγεβρα των ορίων συγκλινουσών ακολουθιών ταυτίζεται με τις ιδιότητες της άλγεβρας πραγματικών αριθμών. Δηλαδή αν (α_n) και (β_n) είναι συγκλίνουσες ακολουθίες με όρια α και β αντίστοιχα τότε:

(α) $\lim \; c\alpha_n = c\alpha$

(β) $\lim \; (\alpha_n \pm \beta_n) = \alpha \pm \beta$

(γ) $\lim \; (\alpha_n)(\beta_n) = \alpha\beta$

(δ) $\lim \; (\alpha_n/\beta_n) = \alpha/\beta$ υπό την προϋπόθεση ότι $\beta \neq 0$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Το όριο συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n \to \alpha \\ \alpha_n \to \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

Μία οποιαδήποτε υπακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας έχει το ίδιο όριο με την ακολουθία. Συνοπτικά:

$$\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \alpha_{s_n} \to \alpha$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Αν $k \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha_n \to \alpha \Leftrightarrow \alpha_{n+k} \to \alpha$$

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Συνοπτικά:

$$\alpha_n \to \alpha \Rightarrow (\alpha_n) \text{ φραγμένη.}$$

Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη ακολουθία είναι μηδενική α-κολουθία. Συνοπτικά:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n \to 0 \\ (\beta_n) \text{ φραγμένη} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_n \beta_n \to 0$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Αν η (β_n) είναι μηδενική ακολουθία και η (α_n) ακολουθία τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ να είναι $|\alpha_n| \leq s|\beta_n|, s > 0$, τότε η ακολουθία (α_n) είναι μηδενική.
Συνοπτικά:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_n \leq s|\beta_n|, \forall n \geq n_0, s > 0 \\ (\beta_n) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_n \to 0$$

Ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (κριτήριο παρεμβολής):

$$\left.\begin{array}{r} \beta_n \leq \alpha_n \leq c_n, \forall n \geq n_0 \\ \lim\ \beta_n = \lim\ c_n = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_n \to \alpha$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Αν οι ακολουθίες (α_n) και (β_n) είναι συγκλίνουσες και ισχύει $\alpha_n < \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θα είναι $lim\ \alpha_n \leq lim\ \beta_n$. Συνοπτικά:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta \\ \alpha_n < \beta_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

Για κάθε ακολουθία (α_n) ισχύει

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_{2n} \to \alpha \\ \alpha_{2n-1} \to \alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha_n \to \alpha$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy

Μία ακολουθία (α_n) συγκλίνει, αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιος, ώστε να είναι $|\alpha_p - \alpha_q| < \epsilon$ για κάθε $p, q \geq n_0$.
Συμβολικά:
$lim\ \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n = n_0(\epsilon) : |\alpha_p - \alpha_q| < \epsilon, \forall p, q \geq n_0$.

Παρατήρηση: με βάση αυτό το κριτήριο, δε χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριο α προκειμένου να δείξουμε ότι η ακολουθία (α_n) συγκλίνει.

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Ειδικότερα,

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha_n) \text{ αύξουσα} \\ \alpha_n \leq \phi_\alpha, \forall n \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\ \alpha_n = \alpha \leq \phi_\alpha$$

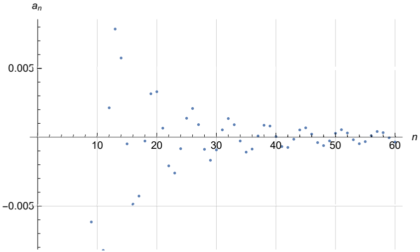
$$\left.\begin{array}{r}(\alpha_n) \text{ φθίνουσα} \\ \alpha_n \geq \phi_\kappa, \forall n \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\ \alpha_n = \alpha \geq \phi_\kappa$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις οι ακολουθίες συγκλίνουν στο $\sup a_n$ και $\inf a_n$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_n = \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n^2}$.

Ισχύει ότι $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ και $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.
Συνεπώς $-2 \leq \sin(n) + \cos(n) \leq 2$ και $-\frac{2}{n^2} \leq \frac{(\sin(n)+\cos(n))}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$.
Όμως $\lim \; -\frac{2}{n^2} = 0$ και $\lim \; \frac{2}{n^2} = 0$. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim \; \frac{(\sin(n)+\cos(n))}{n^2} = 0$.



Απειριζόμενες ακολουθίες

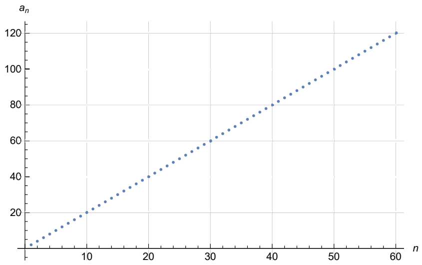
Λέμε ότι η ακολουθία (α_n) *απειρίζεται θετικά* ή ότι το όριο της (α_n) είναι το $+\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(M)$ (δηλ. που εξαρτάται από το M) τέτοιος ώστε να είναι $\alpha_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολικά,
$\lim \ \alpha_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M) : \alpha_n > M, \forall n \geq n_0$

Λέμε ότι η ακολουθία (α_n) *απειρίζεται αρνητικά* ή ότι το όριο της (α_n) είναι το $-\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(M)$ (δηλ. που εξαρτάται από το M) τέτοιος ώστε να είναι $\alpha_n < -M$ για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολικά,
$\lim \ \alpha_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M) : \alpha_n < -M, \forall n \geq n_0$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = 2n$ απειρίζεται θετικά.

Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M)$ τέτοιος ώστε $\alpha_n > M, \forall n > n_0$, ισοδύναμα $2n > M, \forall n > n_0$. Επιλέγουμε το $n_0 = \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$.



Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι η (α_n) είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία με όριο α, ότι η (β_n) απειρίζεται θετικά. Ισχύει ότι:

(α) $\lim \ \alpha\beta_n = +\infty$ για $\alpha > 0$ και $-\infty$ για $\alpha < 0$.

(β) $\lim \ (\alpha_n + \beta_n) = +\infty$

(γ) $\lim \ (\alpha_n - \beta_n) = -\infty$

(δ) $\lim \ (\alpha_n)(\beta_n) = +\infty$ για $\alpha > 0$ και $-\infty$ για $\alpha < 0$

(ε) $\lim \ (\alpha_n/\beta_n) = 0$

Σχέση ορίων συναρτήσεων με όρια ακολουθιών

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ και $f(n) = \alpha_n$ όπου $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim \alpha_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$).

Αν $\lim \alpha_n = \alpha$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = \alpha$, τότε

$$\lim f(\alpha_n) = f(\alpha)$$

Άσκηση

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$.

Λύση

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \overset{L'Hospital\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(\ln(x)))'}{(\ln(x))'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_{n+1} = \frac{2}{5}\alpha_n + 5, \alpha_0 = 0$ είναι συγκλίνουσα.

Θ.δ.ο. είναι αύξουσα. Για $n = 0$ ισχύει ότι $\alpha_0 = 0$ και $\alpha_1 = 5 > \alpha_0$.
Προχωράμε με την επαγωγή προσπαθώντας να δείξουμε ότι είναι αύξουσα:

Για $n = k$ υποθέτουμε ότι $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \geq \alpha_k \Leftrightarrow \frac{3}{5}\alpha_k \leq 5 \Leftrightarrow \alpha_k \leq \frac{25}{3}$.

Για $n = k + 1$ Θ.δ.ό. $\alpha_{k+2} \geq \alpha_{k+1}$.

$$\alpha_{k+2} \geq \alpha_{k+1} \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_{k+1} + 5 \geq \alpha_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{5}(\frac{2}{5}\alpha_k + 5) + 5 \geq \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \Leftrightarrow \frac{4}{25}\alpha_k + 7 \geq \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \Leftrightarrow$$

$$2 \geq \frac{6}{25}\alpha_k \Leftrightarrow \alpha_k \leq \frac{25}{3}$$

που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.

Εφαρμογή

Θ.δ.ό. είναι άνω φραγμένη.
Έστω σ ένα άνω φράγμα της α_n. Τότε

$$\alpha_n < \sigma \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_n < \frac{2}{5}\sigma \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_n + 5 < \frac{2}{5}\sigma + 5 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} < \frac{2}{5}\sigma + 5.$$

Επιλέγουμε $\sigma \geq \frac{2}{5}\sigma + 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sigma \geq 5 \Leftrightarrow \sigma \geq \frac{25}{3}$ (εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση $x = \frac{2}{5}x + 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{25}{3}$).
Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή:

- Για $n = 0$, $\alpha_0 = 0 < \frac{25}{3}$.
- Για $n = k$, έστω $\alpha_k \leq \frac{25}{3}$.
- Για $n = k + 1$, Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1} \leq \frac{25}{3}$.
  Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

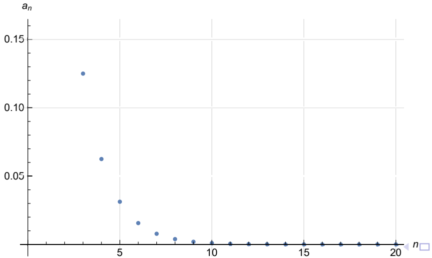
$$\alpha_k \leq \frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_k \leq \frac{2}{5}\frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \leq \frac{10}{3} + 5 \Leftrightarrow \alpha_{k+1} \leq \frac{25}{3}.$$

Άρα η ακολουθία είναι συγκλίνουσα ως αύξουσα και άνω φραγμένη.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, 3, \cdots$ είναι συγκλίνουσα.

Η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ είναι φθίνουσα. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, λαμβάνουμε υπόψη ότι:
$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha_n$ και συνεπώς $\alpha_{n+1} < \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης η ακολουθία αυτή είναι κάτω φραγμένη αφού: $0 < \frac{1}{2^n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.



Χρήσιμα γνωστά όρια

- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \; a > 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \\ \text{δεν υπάρχει} & a \leq -1 \end{cases}$

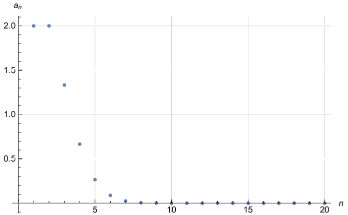
Κριτήριο λόγου

Όταν $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = b$, με $\alpha_n \neq 0$ και $0 \leq b < 1$ τότε $\alpha_n \to 0$. Εάν $b > 1$ τότε $\alpha_n \to \infty$, ενώ εάν $b = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα:
Έστω $\alpha_n = \frac{2^n}{n!}$. Τότε βάσει του κριτηρίου του λόγου έχουμε:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Επομένως η ακολουθία συγκλίνει στο 0.



Κριτήριο ρίζας

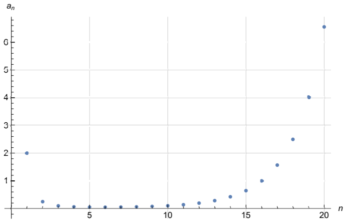
Όταν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = b$, με $\alpha_n \geq 0$ και $0 \leq b < 1$ τότε $\alpha_n \to 0$. Εάν $b > 1$ τότε $\alpha_n \to \infty$, ενώ εάν $b = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα:

Έστω $\alpha_n = \frac{2^n}{n^4}$. Τότε βάσει του κριτηρίου της ρίζας έχουμε:

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^4}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1^4} = 2 > 1$$

Επομένως η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$.



Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{n^2}{n^4+n^3+1}$

Παρατηρούμε ότι $0 \leq \frac{n^2}{n^4+n^3+1} \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\alpha_n \to 0$.

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} - 2\cdot 10^{2n-1}}$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με 10^{2n-1} και έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4\frac{1}{10^{n-1}} - 3\cdot 10}{3\cdot\frac{1}{10^n} - 2} = \frac{4\cdot 0 - 3\cdot 10}{3\cdot 0 - 2} = 15$$

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{n^2 2^n + 3^n - 1}{4^n + n}$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με 4^n και έχουμε: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{2^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{n}{4^n}}$.

Θα υπολογίσουμε πρώτα το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$ με χρήση του κριτηρίου λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ άρα } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Κατά όμοιο τρόπο υπολογίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4^n} = 0$. Τέλος, γνωρίζουμε ότι

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, οπότε τελικά: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{0+0-0}{1+0} = 0$.

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{1+3^n}{1+\lambda^n+3^n}$ όπου $\lambda \geq 0$.

Διαιρούμε με 3^n και έχουμε: $a_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{\lambda}{3}\right)^n+1}$. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- $0 \leq \lambda < 3$ όπου ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n = 0$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n+1} = 1.$$

- $\lambda = 3$ όπου ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(3/3)^n = 1$, οπότε $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+\lim\limits_{n\to\infty}(3/3)^n+1} = \frac{1}{2}$.
- $\lambda > 3$ όπου ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n = +\infty$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n+1} = \frac{0+1}{1+\infty+1} = 0.$$

Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $\alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}}$ με $\alpha_1 = \sqrt{2}$.

Έστω $\sigma > 0$ ένα άνω φράγμα της α_n, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $\alpha_n < \sigma, \forall n$, ή

$$\alpha_{n-1} < \sigma \Leftrightarrow 2 + \alpha_{n-1} < 2 + \sigma \Leftrightarrow \alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}} < \sqrt{2 + \sigma} < \sigma.$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε το σ έτσι ώστε

$$\sigma \geq \sqrt{2 + \sigma} \Leftrightarrow \sigma^2 \geq 2 + \sigma \Leftrightarrow \sigma^2 - \sigma - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sigma + 1)(\sigma - 2) \geq 0.$$

Επειδή $\sigma > 0$ τότε αρκεί $\sigma \geq 2$, οπότε επιλέγουμε $\sigma = 2$.
Τώρα, μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι η α_n είναι άνω φραγμένη, γιατί προφανώς $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$, και επίσης $\alpha_k < 2 \Rightarrow \alpha_{k+1} < 2$ (βλ. ισοδύναμη πρόταση παραπάνω για $\alpha_{n-1} < \alpha_n$).

Παράδειγμα (συνέχεια)

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $\alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}}$ με $\alpha_1 = \sqrt{2}$.

Συνεχίζοντας, θα δείξουμε με επαγωγή ότι η α_n είναι γν. αύξουσα:

- Για $n = 2$ έχουμε $\alpha_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = \alpha_1$.
- Έστω ότι $\alpha_{k-1} < \alpha_k$. Θ.δ.ο. και $\alpha_k < \alpha_{k+1}$.
  Πράγματι,

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k \Leftrightarrow 2 + \alpha_{k-1} < 2 + \alpha_k \Leftrightarrow \sqrt{2 + \alpha_{k-1}} < \sqrt{2 + \alpha_k} \Leftrightarrow \alpha_k < \alpha_{k+1}.$$

Επομένως η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση

Δείξαμε προηγουμένως ότι η $\alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}}$ με $\alpha_1 = \sqrt{2}$ συγκλίνει. Ποιό είναι το όριό της;

Λύση

Έστω $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \geq 0$ το όριο της ακολουθίας.
Τότε,

$$\alpha_= \sqrt{2+\alpha_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\lim(\alpha_n) = \lim(\sqrt{2+\alpha_{n-1}}) \Rightarrow$$

$$x = \lim \sqrt{2+\alpha_{n-1}} = \sqrt{2+\lim a_{n-1}} = \sqrt{2+x},$$

όπου στο δεξί μέλος χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\lim a_{n-k} = \lim a_n$ για $k=-1$.
Τώρα, υψώνουμε τα 2 μέλη της εξίσωσης που προέκυψε, $x = \sqrt{2+x}$, στο τετράγωνο:

$$x^2 = 2 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

(αφού $x \geq 0$).