Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 2

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Δημήτρης Χρήστου-Βαρσακέλης
Καθηγητής

Οκτώβριος 2023

Θέματα 2ης διάλεξης

- Κυρτότητα συναρτήσεων
- Παράγωγος συνάρτησης
- Διαφορικό
- Αόριστα ολοκληρώματα
- Ορισμένα ολοκληρώματα

Κυρτές συναρτήσεις

Η συνάρτηση f είναι **κυρτή** (convex) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της x_1 και x_2 ισχύει ότι:

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όπου $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ και $\lambda \in [0, 1]$. Είναι αυστηρά κυρτή αν:

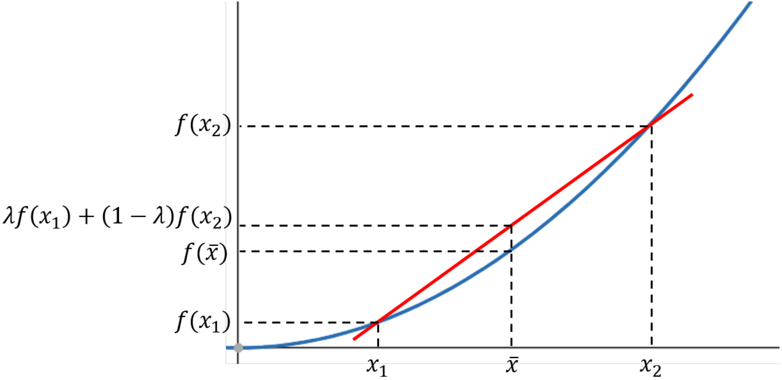
$$f(\bar{x}) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όταν $\lambda \in (0, 1)$.

Αν η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε είναι κυρτή αν $f''(x) \geq 0$ και αυστηρά κυρτή αν $f''(x) > 0$ στην περιοχή που την εξετάζουμε.

Παράδειγμα κυρτής συνάρτησης

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \;\; \bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \;\; \lambda \in [0,1]$$



Σχήμα: Παράδειγμα κυρτής συνάρτησης

Κοίλες συναρτήσεις

Η συνάρτηση f είναι **κοίλη** (concave) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της x_1 και x_2 ισχύει ότι:

$$f(\bar{x}) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όπου $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ και $\lambda \in [0,1]$. Είναι αυστηρά κοίλη αν:

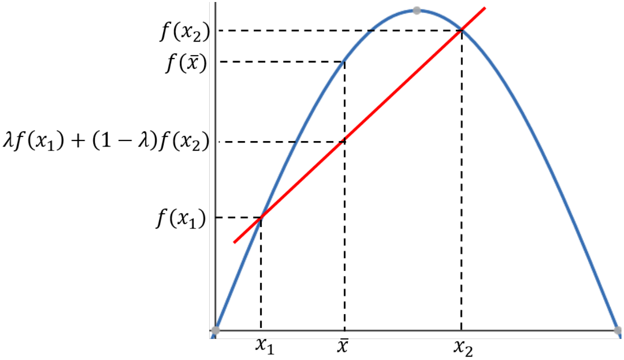
$$f(\bar{x}) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όταν $\lambda \in (0,1)$.

Αν η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε είναι κοίλη αν $f''(x) \leq 0$ και αυστηρά κοίλη αν $f''(x) < 0$ στην περιοχή που την εξετάζουμε.

Παράδειγμα κοίλης συνάρτησης

$$f(\bar{x}) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),\ \ \bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2,\ \ \lambda \in [0,1]$$



Σχήμα: Παράδειγμα κοίλης συνάρτησης

Παράδειγμα: Απόδειξη ότι η απόλυτη τιμή είναι κυρτή συνάρτηση

Σημειώνουμε ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου γιατί η συνάρτηση της απόλυτης τιμής δεν είναι παραγωγίσιμη.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\geq 0$ όπου $\alpha + \beta = 1$. $(\alpha = \lambda, \beta = 1 - \lambda, \lambda \in [0, 1])$.
Τότε:
$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = |\alpha x_1 + \beta x_2|$
$\leq |\alpha x_1| + |\beta x_2|$ (από την τριγωνική ανισότητα για πραγματικούς αριθμούς)
$= |\alpha||x_1| + |\beta||x_2| = \alpha|x_1| + \beta|x_2| = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

Άσκηση

Να δειχθεί με δύο τρόπους ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή.

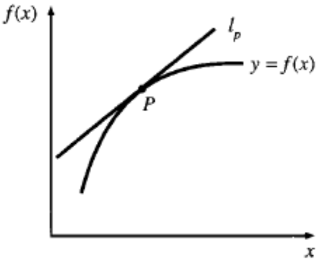
Λύση

1ος τρόπος: Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2 > 0$ συνεπώς είναι κυρτή.

2ος τρόπος: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Leftrightarrow$
$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \leq \lambda {x_1}^2 + (1-\lambda){x_2}^2 \Leftrightarrow$
$\lambda^2 {x_1}^2 + 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 {x_2}^2 \leq \lambda {x_1}^2 + (1-\lambda){x_2}^2 \Leftrightarrow$
$(\lambda - \lambda^2){x_1}^2 - 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda-1+2\lambda-\lambda^2){x_2}^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda - \lambda^2){x_1}^2 - 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (\lambda-\lambda^2){x_2}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \geq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ που ισχύει.

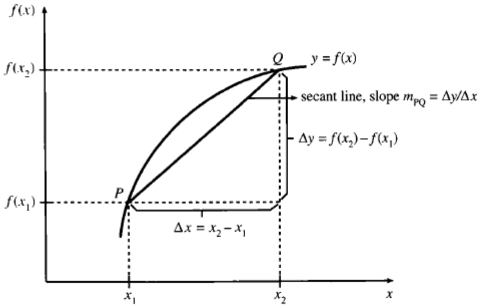
Εφαπτομένη καμπύλης

Η **εφαπτομένη** (tangent) μίας καμπύλης είναι μία ευθεία γραμμή η οποία εφάπτεται ακριβώς στην καμπύλη σε ένα δεδομένο σημείο.



Σχήμα: Η εφαπτομένη μίας καμπύλης στο σημείο P

Τέμνουσα καμπύλης



Σχήμα: Η τέμνουσα μίας καμπύλης

Η διαδικασία καθορισμού του ρυθμού μεταβολής $\Delta y/\Delta x$ γίνεται λαμβάνοντας διαδοχικά όλο και μικρότερες τιμές του Δx. Ο λόγος $\Delta y/\Delta x$ καθώς $\Delta x \to 0$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης. Όταν λαμβάνουμε αυτό το όριο η τέμνουσα ουσιαστικά ταυτίζεται με την εφαπτομένη. Η κλίση της τέμνουσας ανάμεσα στα σημεία P και Q συμβολίζεται ως m_{PQ}.

Ορισμός της παραγώγου

Η **παράγωγος** (derivative) μίας συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο $P = (x_1, f(x_1))$ είναι η κλίση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο:

$$f^{'}(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

όπου $\Delta x = x_2 - x_1$. Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{'}(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Η παράγωγος μίας συνάρτησης $f(x)$ γράφεται και ώς $\frac{dy}{dx}$. Διαισθητικά το dy και το dx αντικατοπρίζουν την έννοια των μεταβολών του y και του x, όπως το Δy και το Δx αντίστοιχα. Η έκφρασή $dy = f^{'}(x)dx$ είναι γνωστή ως το διαφορικό της συνάρτησης $f(x)$.

Ολικό διαφορικό σε σημείο

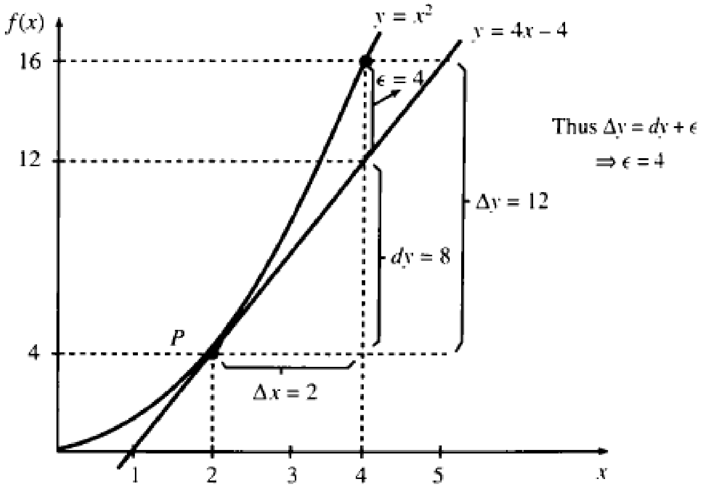
Αν $f^{'}(x_0)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο x_0, τότε το **ολικό διαφορικό** στο σημείο είναι:

$$dy = df(x_0, dx) = f^{'}(x_0)dx$$

Επομένως το διαφορικό είναι συνάρτηση του x και του dx.

Το διαφορικό μας εξασφαλίζει μία μέθοδο εκτίμησης της επίπτωσης που έχει στο y μία μεταβολή του x ίση με Δx. Το Δy είναι η ακριβής μεταβολή του y ενώ το dy είναι η *κατά προσέγγιση* μεταβολή. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου, αυτό ισοδυναμεί με το να χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη μίας συνάρτησης για να εκτιμήσουμε την επίπτωση μίας μεταβολής του x επί του y.

Προσέγγιση με το ολικό διαφορικό



Σχήμα: Η $dy = f^{'}(x)dx$ ως προσέγγιση μίας μεταβολής στο y

Κανόνες παραγώγισης

1ος κανόνας: Παράγωγος μίας σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x) = c$, όπου c είναι μία σταθερά, τότε $f^{'}(x) = 0$.

2ος κανόνας: Παράγωγος μίας γραμμικής συνάρτησης

Αν $f(x) = mx + b$, όπου m και b είναι σταθερές, τότε $f^{'}(x) = m$.

3ος κανόνας: Παράγωγος μίας δυναμοσυνάρτησης

Αν $f(x) = x^n$, τότε $f^{'}(x) = nx^{n-1}$.

Κανόνες παραγώγισης

4ος κανόνας: Παράγωγος γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση

Αν $g(x) = cf(x)$, με c μία σταθερά, τότε $g^{'}(x) = cf^{'}(x)$.

5ος κανόνας: Παράγωγος του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = g(x) + f(x)$ τότε $h^{'}(x) = g^{'}(x) + f^{'}(x)$. αν $h(x) = g(x) - f(x)$ τότε $h^{'}(x) = g^{'}(x) - f^{'}(x)$.

6ος κανόνας: Παράγωγος αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων

Αν $h(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$ τότε $h^{'}(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i^{'}(x)$.

Κανόνες παραγώγισης

7ος κανόνας: Παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = f(x)g(x)$, τότε $h^{'}(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$.

8ος κανόνας: Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$, τότε $h^{'}(x) = \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{[g(x)]^2}$.

9ος κανόνας: Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης - αλυσωτός κανόνας

Αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, δηλαδή $y = f(g(x)) = h(x)$, τότε $h^{'}(x) = f^{'}(u)g^{'}(x)$
ή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Κανόνες παραγώγισης

10ος κανόνας: Παράγωγος της αντίστροφης μίας συνάρτησης

Αν η $y = f(x)$ έχει ως αντίστροφη συνάρτηση την $x = g(y)$, δηλαδή αν $g(y) = f^{-1}(y)$ και $f^{'} \neq 0$ τότε:
$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$ ή $g^{'}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ όπου $y = f(x)$.

11ος κανόνας: Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης

Αν $y = e^x$, τότε $dy/dx = e^x$.

12ος κανόνας: Παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης

Αν $y = \ln x$, τότε $dy/dx = 1/x$.

Παραδείγματα

- $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\right] = \frac{(x^2-5x+6)\frac{d}{dx}(x^2-2x+1)-(x^2-2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-5x+6)}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{(x^2-5x+6)(2x-2)-(x^2-2x+1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$

- $\frac{d}{dx}\left[(3x+1)^2\right] = [2(3x+1)]\frac{d}{dx}[3x+1] = 2(3x+1)3 = 6(3x+1)$

Λογαριθμική παραγώγιση

Λογαριθμική παραγώγιση ονομάζεται η τεχνική κατά την οποία ο υπολογισμός της παραγώγου μίας συνάρτησης $f'(x)$ γίνεται μέσω της παραγώγου του $\ln(f(x))$, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)$$

τότε έχουμε ισοδύναμα:
$y = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x) \Leftrightarrow \ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\right) \Leftrightarrow$
$\ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + \ln(\sin^3(x)) + \ln(\cos^2(x))$

Λογαριθμική παραγώγιση (συνέχεια)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε ισοδύναμα:

$$(\ln(y))' = \left(\ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + \ln(\sin^3(x)) + \ln(\cos^2(x))\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}(1-x)' - \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' + 3\frac{1}{\sin(x)}(\sin(x))' + 2\frac{1}{\cos(x)}(\cos(x))' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow$$

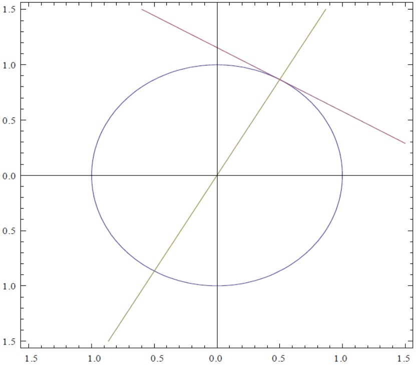
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x) \Leftrightarrow$$

$$y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right)$$

Άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1, στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ καθώς και την εξίσωση της κάθετης της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.



Λύση

Η εξίσωση του κύκλου περιγράφεται από την $x^2 + y^2 = 1$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς x έχουμε:
$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x\frac{d}{dx}(x) + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
Επομένως, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι
$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1/2,\sqrt{3}/2)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Η εξίσωση της κάθετης της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, έχει κλίση $\lambda = \frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.
Επομένως, η εξίσωσή της είναι: $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F^{'}(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Θεώρημα: Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής
  $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$
  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:
  $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των παραγουσών συναρτήσεων της:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Για παράδειγμα:

$$\int x^2 dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{x^3}{3} + c$$

διότι ισχύει:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

ενώ $\int e^{2x} dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$, διότι: $\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}$

Βασικό τυπολόγιο αόριστων ολοκληρωμάτων

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}^*$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
8. $\int e^x dx = e^x + c$
9. $\int \alpha^x dx = \frac{1}{\ln \alpha}\alpha^x + c, \quad 0 < \alpha \neq 1$
10. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{arctan}x + c, \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsin}x + c, \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arccos}x + c$
11. $\int \sinh x dx = \cosh x + c, \int \cosh x dx = \sinh x + c$

Γραμμικότητα ολοκληρώματος

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Παραδείγματα

- $\int \sqrt{3x}dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}dx = \sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} + c$

- $\int \sqrt[4]{\frac{2}{x^3}}dx = \int \frac{\sqrt[4]{2}}{x^{\frac{3}{4}}}dx = \sqrt[4]{2}\int x^{-\frac{3}{4}}dx = \sqrt[4]{2}\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + c = \sqrt[4]{2}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 4\sqrt[4]{2x} + c$

- $\int \frac{2x^2-x+5}{x^2}dx = \int \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx = \int 2dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{5}{x^2}dx =$
  $2x - \ln|x| - 5x^{-1} + c = 2x - \ln|x| - \frac{5}{x} + c$

- $\int \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)}dx = \int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

Άσκηση

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{4}{\sin^2(2x)} dx$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

έχουμε:

$$\int \frac{4}{\sin^2(2x)}dx = \int \frac{4}{(2\sin(x)\cos(x))^2}dx = \int \frac{4}{4\sin^2(x)\cos^2(x)}dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \int \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = \tan(x) - \cot(x) + c$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)dx$$

Παραδείγματα:

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^x dx$:
  $\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)^{'} dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int x(e^x)^{'} dx =$
  $x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$
- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x\cos(ax)dx$:
  $\int x\cos(ax)dx = \int x\left(\frac{\sin(ax)}{a}\right)^{'} dx = \frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int x'\sin(ax)dx =$
  $\frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int \sin(ax)dx = \frac{x\sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int f(g(x))g^{'}(x)dx = \int f(u)du$$

όπου $u = g(x)$ και $du = g^{'}(x)dx$

Παραδείγματα:

- $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2+1$ οπότε $du = (x^2+1)^{'}dx = 2xdx$.
  Συνεπώς $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c =$
  $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$
- $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$. Θέτουμε $u = x^3$ οπότε $du = (x^3)^{'} = 3x^2dx$.
  Συνεπώς $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3)^{'}}{\sqrt{1-(x^3)^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{u(x)'}{\sqrt{1-(u(x))^2}}dx =$
  $\frac{1}{3}\arcsin(u(x)) + c = \frac{1}{3}\arcsin(x^3) + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$$\int \frac{p(x)}{(q(x))^k} dx$$

Όπου $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα για τα οποία ισχύει $p(x) = q'(x)$ και $k \in \mathbb{N}$.
Η αντικατάσταση που κάνουμε είναι $u = q(x)$.

Παράδειγμα: $\int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2} dx$. Θέτουμε
$u = 3x^2 - x - 12 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 6x - 1 \Leftrightarrow du = (6x-1)dx$. Επομένως
$\int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{3x^2-x-12} + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

Ρητή συνάρτηση με αριθμητή ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και παρονομαστή ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού το οποίο δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δεν παραγοντοποιείται.

$$\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+1+4}dx = \int \frac{8x+4}{(x-1)^2+4}dx \underset{\substack{u=x-1\\du=dx}}{=} \int \frac{8(u+1)+4}{u^2+4}du =$$

$$\int \frac{8u}{u^2+4}du + \int \frac{12}{u^2+2^2}du = 4\int \frac{2u}{u^2+4}du + 6\int \frac{2}{u^2+2^2}du \underset{\substack{v=u^2+4\\dv=2udu}}{=} 4\int \frac{dv}{v} + 6\int \frac{2}{u^2+2^2}du =$$

$$4\ln|v| + 6\arctan(\tfrac{u}{2}) + c = 4\ln|u^2+4| + 6\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right) + c =$$

$$4\ln(x^2-2x+5) + 6\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right) + c$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περίπτωση που ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή και αυτός έχει απλές ρίζες:
$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$

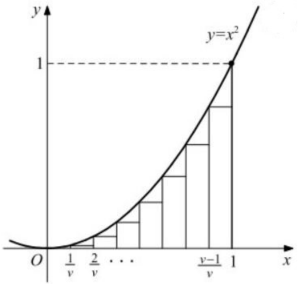
Παράδειγμα: $\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}$. Αναλύουμε σε παράγοντες:
$\frac{x+2}{x^2+2x-8} = \frac{x+2}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+4B}{(x+4)(x-2)}$
Η ισότητα των αριθμητών μας οδηγεί στο σύστημα $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+4B=2 \end{cases}$ το οποίο έχει μοναδική λύση $A = 1/3$ και $B = 2/3$. Επομένως:
$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}dx = \int \left(\frac{1}{3(x+4)} + \frac{2}{3(x-2)}\right) dx = \frac{1}{3}\ln|x+4| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περιπτώσεις που ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο από τον παρονομαστή $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$ (διαίρεση πολυωνύμων), τότε:
$\int A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)} dx = \int A(x)dx + \frac{p_1(x)}{q(x)} dx$, με $\deg p_1(x) < \deg q(x)$

Παράδειγμα:
$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} dx = \int (x^2 - x + 1) + \frac{x-2}{x^2-1} dx = \int (x^2 - x + 1)dx + \int \frac{x-2}{x^2-1} dx$

Εμβαδόν παραβολικού χωρίου

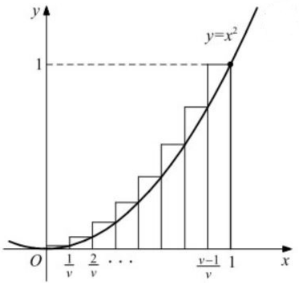


Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ 'από κάτω'

$$\epsilon_\nu = f(0)\tfrac{1}{\nu} + f(\tfrac{1}{\nu})\tfrac{1}{\nu} + f(\tfrac{2}{\nu})\tfrac{1}{\nu} + \cdots f(\tfrac{\nu-1}{\nu})\tfrac{1}{\nu} =$$
$$\tfrac{1}{\nu}(0^2 + (\tfrac{1}{\nu})^2 + (\tfrac{2}{\nu})^2 + \cdots + (\tfrac{\nu-1}{\nu})^2) = \tfrac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2) =$$
$$\tfrac{1}{\nu^3}\tfrac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6} = \tfrac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}$$

(χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

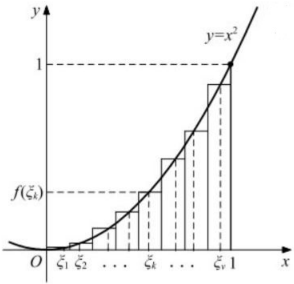
Εμβαδόν παραβολικού χωρίου



Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ 'από πάνω'

$E_\nu = f(\frac{1}{\nu})\frac{1}{\nu} + f(\frac{2}{\nu})\frac{1}{\nu} + \cdots + f(\frac{\nu}{\nu})\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}((\frac{1}{\nu})^2 + (\frac{2}{\nu})^2 + \cdots + (\frac{\nu}{\nu})^2) =$
$\frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}$
Όμως για το εμβαδό E ισχύει $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \epsilon_\nu \leq E \leq \lim\limits_{\nu\to+\infty} E_\nu$. Συνεπώς $E = \frac{1}{3}$.

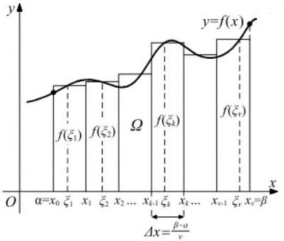
Εμβαδόν παραβολικού χωρίου



Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ ‘με ενδιάμεσα σημεία’

$S_\nu = \frac{1}{\nu} f(\xi_1) + \frac{1}{\nu} f(\xi_2) + \cdots + \frac{1}{\nu} f(\xi_\nu)$. Επειδή $f(x_{k-1}) \leq f(\xi_k) \leq f(x_k)$, $k = 1, \cdots, \nu$ θα είναι: $\frac{1}{\nu} f(x_{k-1}) \leq \frac{1}{\nu} f(\xi_k) \leq \frac{1}{\nu} f(x_k)$. Συνεπώς $\epsilon_\nu \leq S_\nu \leq E_\nu$. Συνεπώς $\lim_{\nu \to +\infty} \epsilon_\nu = \lim_{\nu \to +\infty} E_\nu = S_\nu$ και $S_\nu = \frac{1}{3}$.

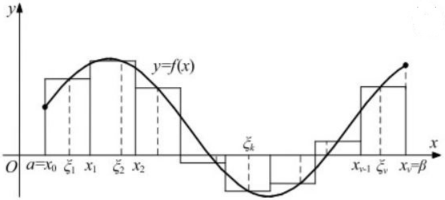
Ορισμός εμβαδού



Σχήμα: Γενικός ορισμός εμβαδού

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με
$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_\nu = \beta$
Σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα ξ_k
$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \Delta x(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu))$.
Υπολογίζουμε το $\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Ορισμένο ολοκλήρωμα



Σχήμα: Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \Delta x(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots f(\xi_\nu)) = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x.$$

Το όριο του παραπάνω αθροίσματος όταν $\nu \to +\infty$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ξ_k.

Γράφεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται ως ολοκλήρωμα της f από το α στο β.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ισχύει ότι:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ για $a < b$

Θεώρημα 1^o: Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Θεώρημα 2^o: Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Θεώρημα 3^o: Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε

$$\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Θεώρημα: Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ x \in \Delta$$

είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Θεώρημα (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού):
Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Οι τύποι της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και για ορισμένα ολοκληρώματα

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f^{'}(x)g(x)dx$$

όπου $f^{'}, g^{'}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Για παράδειγμα:

$\int_0^{\pi/2} xcosxdx = \int_0^{\pi/2} x(sinx)^{'}dx = [xsinx]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} sinxdx =$
$[xsinx]_0^{\pi/2} + [cosx]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}$

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για ορισμένα ολοκληρώματα

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_a^b f(g(x))g^{'}(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$$

όπου $f, g^{'}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g^{'}(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(b)$.

Για παράδειγμα $I = \int_1^e \frac{lnx}{x} dx = \int_1^e lnx(lnx)^{'} dx$. Θέτουμε $u = lnx$, οπότε $du = (lnx)^{'} dx$, $u_1 = ln1 = 0$, $u_2 = lne = 1$. Συνεπώς

$$I = \int_0^1 udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

.

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων - Υπολογισμός εμβαδών

Το εμβαδόν μεταξύ δύο συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $f_1(x) \geq f_2(x)$ για $a \leq x \leq b$ ισούται με

$$E = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \, dx$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κλειστού χωρίου που ορίζουν οι συναρτήσεις $f_1(x) = \sqrt{x}$ και $f_2(x) = x^2$.
Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών: $\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.
Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(0, 1)$ η συνάρτηση $\sqrt{x} - x^2$ παίρνει θετικές τιμές, οπότε το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 \left|\sqrt{x} - x^2\right| dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων - Υπολογισμός μήκους τμήματος καμπύλης

Το μήκος τμήματος καμπύλης μιας συνάρτησης $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ ισούται με:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το μήκος τμήματος καμπύλης της $y = x^{\frac{3}{2}}$ που ορίζεται ανάμεσα στις ευθείες $x = 0$ και $x = 4$.

Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση έχουμε $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, επομένως το μήκος είναι:

$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4 + 9x} dx$. Εάν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{4 + 9x}$, τότε εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα $L = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

Γενικευμένα ολοκληρώματα (α′ είδους)

Εάν σε ένα ολοκλήρωμα ένα τουλάχιστον από τα δύο άκρα ολοκλήρωσης είναι $\pm\infty$, τότε αυτό ονομάζεται γενικευμένο ολοκλήρωμα α′ είδους.
Μπορούμε να διαχωρίσουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις σε σχέση με το διάστημα ολοκλήρωσης:

- διάστημα $[a, \infty)$, τότε
$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$
- διάστημα $(-\infty, a]$, τότε
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx$$
- διάστημα $(-\infty, +\infty)$, τότε
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

Άν το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, διαφορετικά αποκλίνει.

Παραδείγματα

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$
- $\int_0^\infty \cos(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b \cos(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} [\sin(x)]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} (\sin(b) - sin(0))$.
  Το όριο όμως $\lim\limits_{b\to\infty} \sin(b)$ δεν υπάρχει (γιατί;), επομένως το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.
- $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.