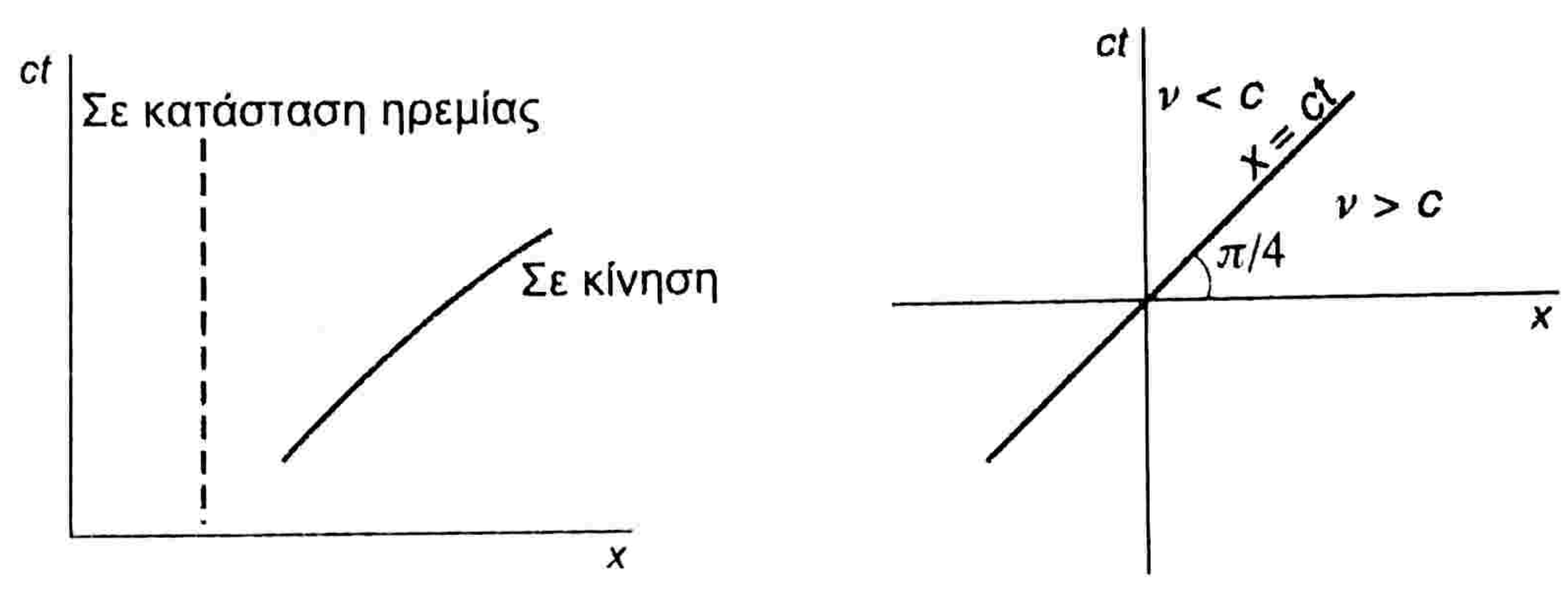


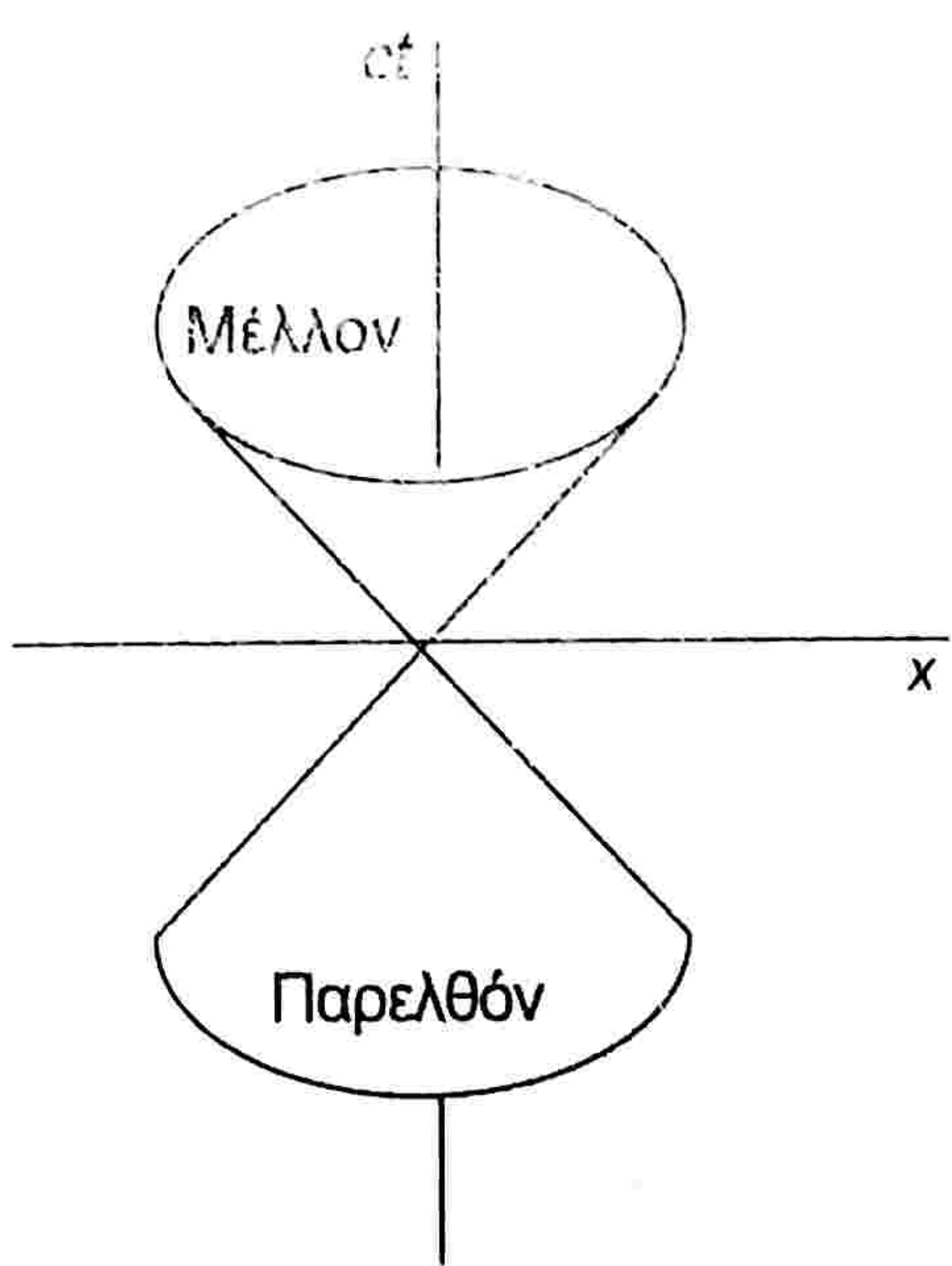
Η κίνηση στον τριδιάστατο χώρο δεν έχει περιορισμούς. Καθώς προχωρά ο χρόνος, το σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z)$ μπορεί να βρεθεί οπουδήποτε. Ένας παρατηρητής έχει πρόσβαση σε ολόκληρο τον χώρο και, εφόσον δεν υπάρχουν χρονικοί περιορισμοί, σε ολόκληρο τον μελλοντικό χρόνο. Φυσικά ο χρόνος κινείται μόνο προς μία κατεύθυνση και είναι πέραν του δικού μας ελέγχου.

Στη φυσική του χωροχρόνου, γεγονός είναι κάθε φυσικό συμβάν που μπορεί να προσδιοριστεί με τις τιμές τριών χωρικών συντεταγμένων συν τον χρόνο: (x, y, z, t) . Για παράδειγμα, η εκπομπή ενός παλμού φωτός από την αρχή των συντεταγμένων τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ένα γεγονός με συντεταγμένες $(0, 0, 0, 0)$. Επειδή δεν μας διευκολύνει να χρησιμοποιούμε συντεταγμένες με διαφορετικές φυσικές διαστάσεις, θα γράφουμε τον χρόνο σε μονάδες μήκους, πολλαπλασιάζοντάς τον επί μια βαθμωτή ταχύτητα. Είναι φυσικό να πολλαπλασιάσουμε τον χρόνο με την ταχύτητα του φωτός, οπότε $t \rightarrow ct$. Επομένως 1 μs αντιστοιχεί σε \approx «300 m χρόνου» και «1 m χρόνου» αντιστοιχεί σε \approx 0.0033 μs. Με αυτή τη σύμβαση μπορούμε να μιλάμε για έναν τετραδιάστατο χωροχρόνο με συντεταγμένες (x, y, z, ct) .



Αν επικεντρωθούμε στην ευθύγραμμη κίνηση με συντεταγμένες x και ct , μπορούμε να σχεδιάσουμε την εξέλιξη ενός γεγονότος σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα. Με μια παράδοξη, αλλά γενικά αποδεκτή σύμβαση, ο χρόνος στα χωροχρονικά διαγράμματα τοποθετείται στον κατακόρυφο άξονα. Καθώς ο χρόνος προχωρά, κάθε σημείο του χωροχρόνου διαγράφει μια τροχιά προς τα επάνω η οποία ονομάζεται *κοσμική γραμμή* (world line). Στο σχήμα φαίνονται δύο κοσμικές γραμμές: Η κατακόρυφη διακεκομμένη ευθεία είναι η κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου σε κατάσταση ηρεμίας (x σταθερό), ενώ η συνεχής γραμμή είναι η κοσμική γραμμή ενός κινούμενου σωματιδίου (τόσο το x όσο και το t αυξάνουν).

Παρατηρούμε ότι με αυτή τη σύμβαση, η ταχύτητα –σε μονάδες της c – δίνεται από τη συνεφαπτομένη της κλίσης της κοσμικής γραμμής. Κλίση ± 1 αντιστοιχεί σε ταχύτητα $\pm c$. Το ταχύτερο γεγονός είναι ένας παλμός φωτός, του οποίου η κοσμική γραμμή δίνεται από τη συνάρτηση $x = ct$ ή $x = -ct$. Αυτή η ευθεία σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον οριζόντιο άξονα, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα δεξιά. Μια κοσμική γραμμή που σχηματίζει γωνία μικρότερη από $\pi/4$ θα περιέγραφε κίνηση ταχύτερη από το φως, κάτι το οποίο δεν είναι επιτρεπτό. Κάθε τριδιάστατο γραφίμα το οποίο περιλαμβάνει τις συντεταγμένες (x, y, ct) έχει τη μορφή δύο κώνων που ονομάζονται *κάψα φωτός* (light cones), με τις κορυφές τους στην αρχή των αξόνων.



14.1 Εισαγωγή

Το 1908, τρία χρόνια μετά από τη δημοσίευση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας από τον Einstein, ο μαθηματικός Hermann Minkowski παρουσίασε μια γεωμετρική διατύπωση των ιδεών του Einstein, βασιζόμενος στην έννοια μιας τετραδιάστατης πολλαπλότητας (manifold) που ονόμασε «χωροχρόνο» (spacetime). Το συμπέρασμα του Minkowski είναι πολύ γνωστό: «Από εδώ και στο εξής, ο χώρος από μόνος του και ο χρόνος από μόνος του είναι καταδικασμένοι να ξεθωριάσουν και να γίνουν απλές σκιές· μόνο κάποια μορφή ένωσης των δύο θα διατηρήσει την ανεξάρτητη πραγματικότητα.» Ο ισχυρισμός του μπορεί να είναι λίγο υπερβολικός—συνεχίζουμε να κινούμαστε ελεύθερα σε έναν τριδιάστατο κόσμο, ενώ παράλληλα παρασυρόμαστε ασταμάτητα προς τα εμπρός στον χρόνο—αλλά η άποψή του υπήρξε ανεκτίμητη στην επέκταση των εννοιών της σχετικότητας σε άλλους τομείς της φυσικής.

Η ειδική σχετικότητα παρέχει μια μεθοδική διαδικασία για τη συσχέτιση των συντεταγμένων από γεγονότα που καταγράφηκαν από παρατηρητές σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Τα βασικά στοιχεία της θεωρίας περιέχονται στον μετασχηματισμό Lorentz. Για να θέσουμε το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα κατανοήσουμε την περιγραφή αυτού του μετασχηματισμού μέσω της έννοιας του χωροχρόνου του Minkowski, θα δούμε συνοπτικά πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα στη νευτώνεια φυσική.

(α) Σε πολικές συντεταγμένες, $r = ut$, $\dot{r} = u$, $\dot{\theta} = \omega$. Οπότε

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} = u\hat{\mathbf{r}} + u\omega t\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Τη χρονική στιγμή t , η χάντρα βρίσκεται επί της ακτίνας του τροχού σε απόσταση ut από το κέντρο του, ενώ ταυτόχρονα η ακτίνα του τροχού σχηματίζει γωνία ωt με τον άξονα x .

(β) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, έχουμε

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$$

$$v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta$$

Αφού $v_r = u$, $v_\theta = r\omega = u\omega t$, $\theta = \omega t$, παίρνουμε

$$\mathbf{v} = (u \cos \omega t - u\omega t \sin \omega t)\hat{\mathbf{i}} + (u \sin \omega t + u\omega t \cos \omega t)\hat{\mathbf{j}}$$

Η έκφραση που προκύπτει σε πολικές συντεταγμένες επιπέδου είναι πολύ πιο απλή. (Παρεμπιπτόντως, η τροχιά που διαγράφει η χάντρα είναι γνωστή ως σπείρα του Αρχιμήδη.)