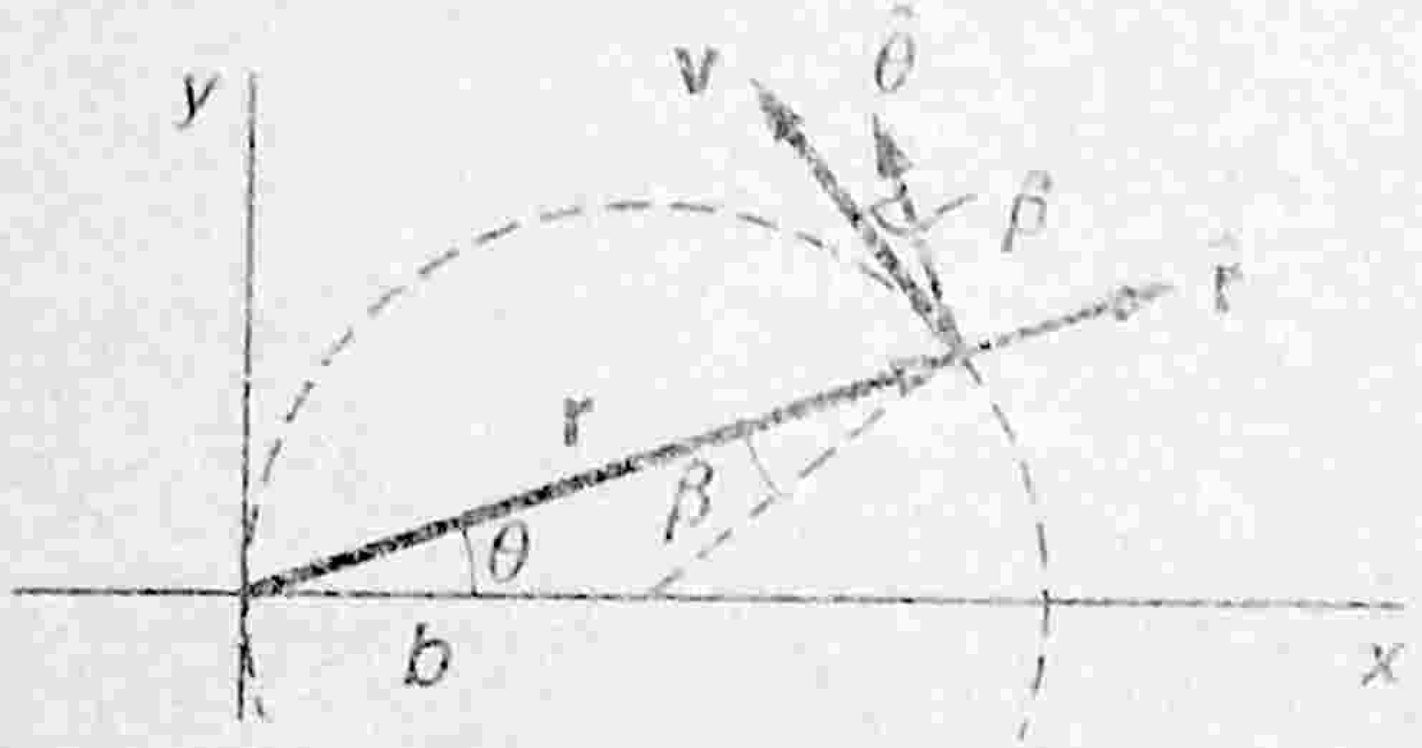
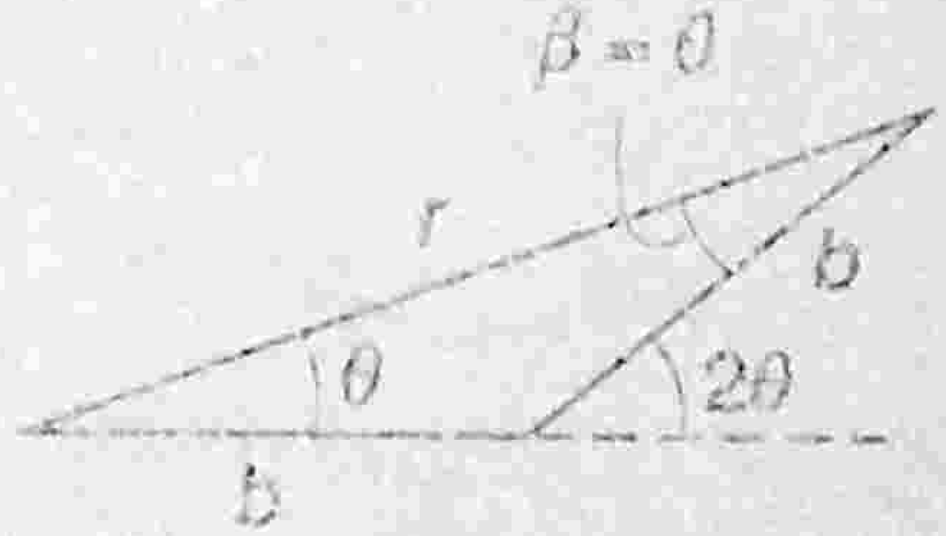
Παράδειγμα 1.17 Κίνηση κατά μήκος έκκεντρου κύκλου

Ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v γύρω από κύκλο ακτίνας b. Το κέντρο του κύκλου βρίσκεται σε απόσταση b από την αρχή των αξόνων, τέτοια ώστε ο κύκλος να εφάπτεται στον άξονα y. Να εκφράσετε το διάνυσμα της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες.





Με αυτό το σημείο αρχής, η $\mathbf{v}$ δεν είναι πια απόλυτα παράλληλη ως προς το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα:

$$\mathbf{v} = -v\sin\beta\hat{\mathbf{r}} + v\cos\beta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -v\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + v\cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Το τελευταίο βήμα είναι απόρροια του γεγονότος ότι οι γωνίες β και θ είναι οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται, άρα είναι εξ ορισμού ίσες.

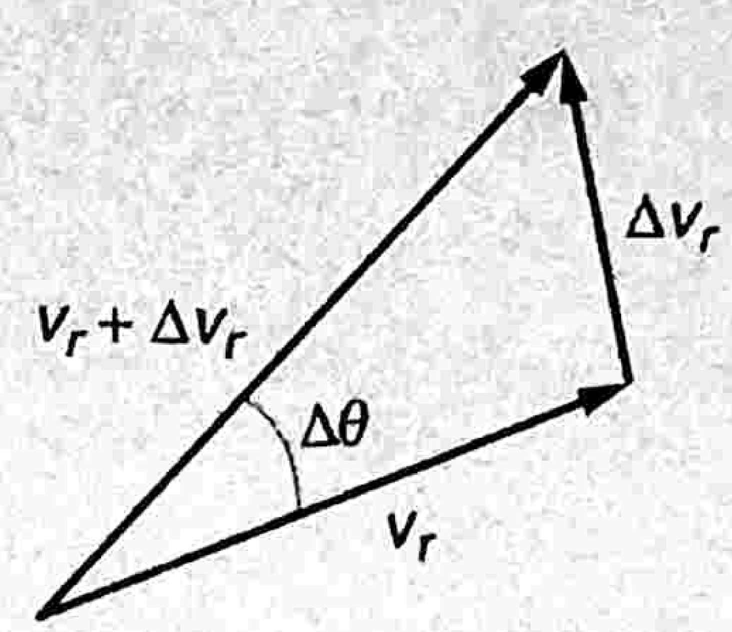
Για να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό, πρέπει να εκφράσουμε τη γωνία θ συναρτήσει του χρόνου. Γεωμετρικά προκύπτει ότι $2\theta = \omega t$ ή $\theta = \omega t / 2$, όπου $\omega = v / b$. Άρα

$$\mathbf{v} = -v\sin(vt / 2b)\hat{\mathbf{r}} + v\cos(vt / 2b)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Παράδειγμα 1.18 Επιτάχυνση χάντρας που κινείται επί της ακτίνας ενός τροχού

Μια χάντρα κινείται κατά μήκος της ακτίνας ενός τροχού με ταχύτητα σταθερού μέτρου u και φορά από το κέντρο προς την περιφέρεια. Ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το κέντρο. Η γωνιακή θέση της ακτίνας του τροχού δίνεται από την εξίσωση $\theta = \omega t$, όπου ω σταθερά. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση της χάντρας.

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



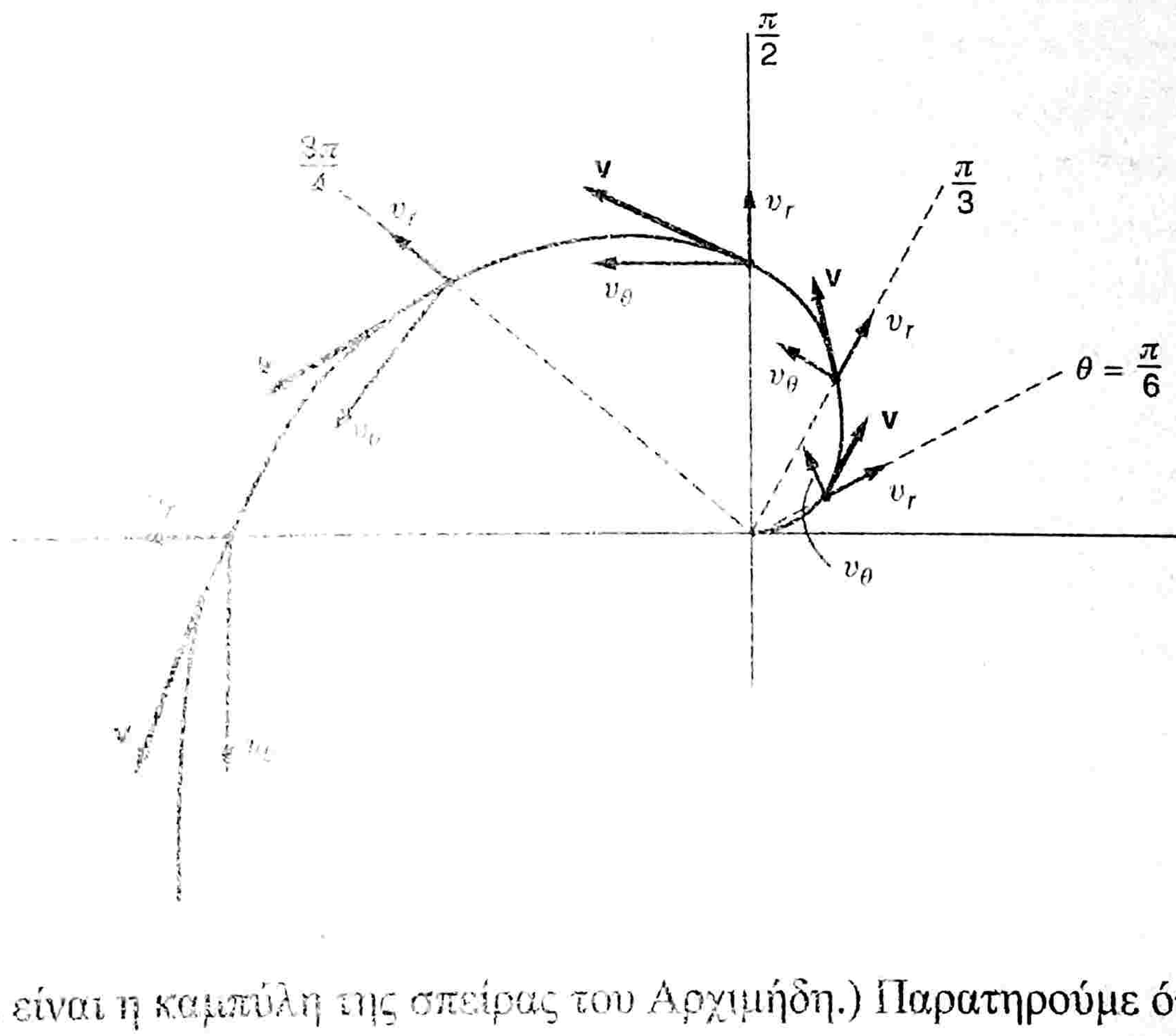
Δίνεται ότι $\dot{r} = u$ και $\theta = \omega t$, οπότε $\dot{\theta} = \omega$. Η ακτινική θέση δίνεται από την εξίσωση $r = ut$. Άρα, όπως και στο Παράδειγμα 1.16, έχουμε

$$\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{r}} + u\omega t\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Η επιτάχυνση ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -u\omega^2 t\hat{\mathbf{r}} + 2u\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Στο σχήμα φαίνεται η ταχύτητα σε διάφορες θέσεις του τροχού.



(Και εδώ η τροχιά είναι η καμπύλη της σπείρας του Αρχιμήδη.) Παρατηρούμε ότι η ακτινική ταχύτητα είναι σταθερή. Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι επίσης σταθερή—είναι προφανές αυτό;