

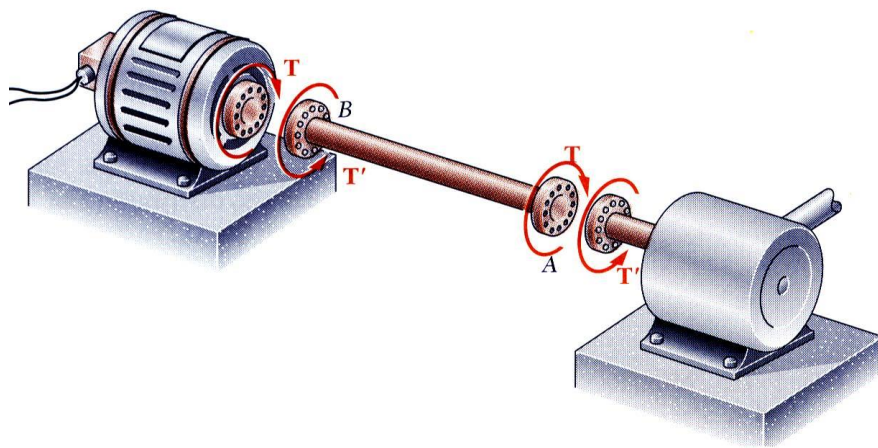
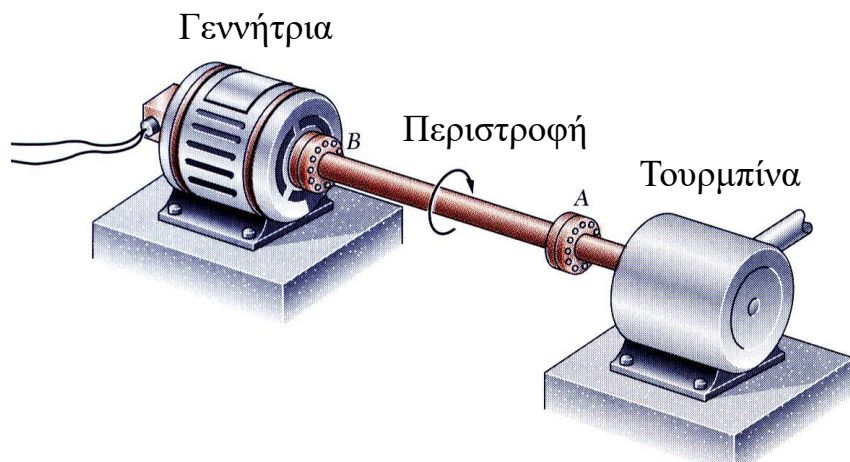
ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

ΑΝΤΟΧΗ των ΥΛΙΚΩΝ

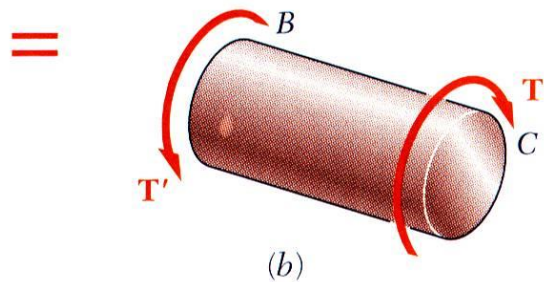
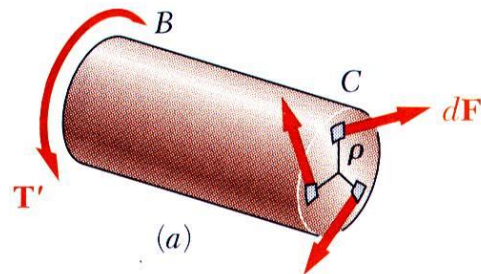
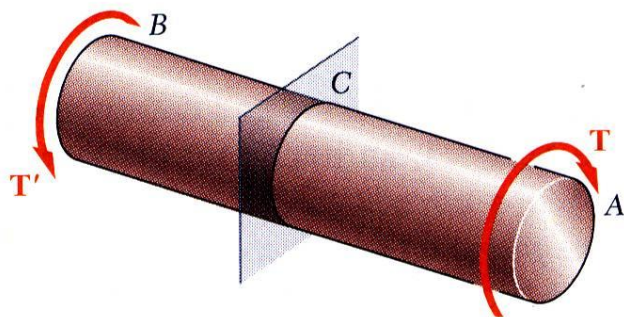
Στρέψη

Στρεπτικά φορτία σε κυλινδρική άτρακτο



- Αναλύουμε τις τάσεις και παραμορφώσεις σε κυλινδρικές άτρακτους που υπόκεινται σε ζεύγη στρέψης ή ροπές στρέψης.
- Η τουρμπίνα εξασκεί ροπή T στην άτρακτο.
- Η άτρακτος μεταδίδει την ροπή στην γεννήτρια.
- Η γεννήτρια αντιδρά και δημιουργεί μια ίση και αντίθετη ροπή T' .

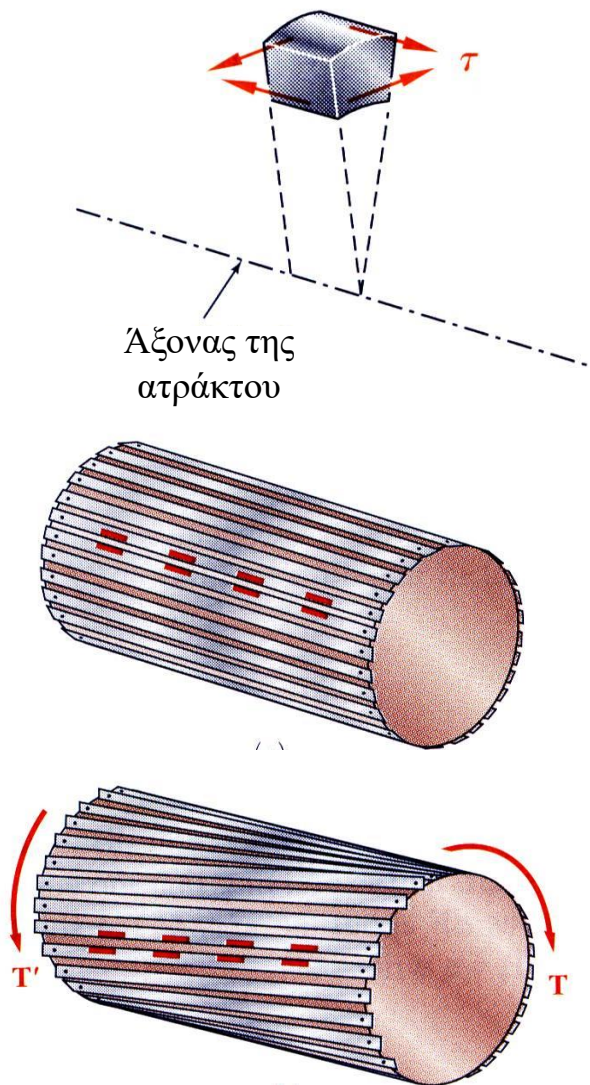
Προκαταρκτική συζήτηση για την καθαρή στρέψη



- Μια ράβδος καταπονείται σε στρέψη όταν επάνω σε αυτή επενεργούν ζεύγη δυνάμεων ίσων μέτρων και αντίθετων φορών που τα επίπεδα τους είναι κάθετα στον κεντροβαρικό της άξονα.
- Οι συνθήκες ισορροπίας επιβάλλουν το σύστημα των επιβαλλόμενων διατμητικών δυνάμεων να είναι ισοδύναμο με μια εσωτερική ροπή στρέψης T , ίση και αντίθετη με την εφαρμοζόμενη ροπή,

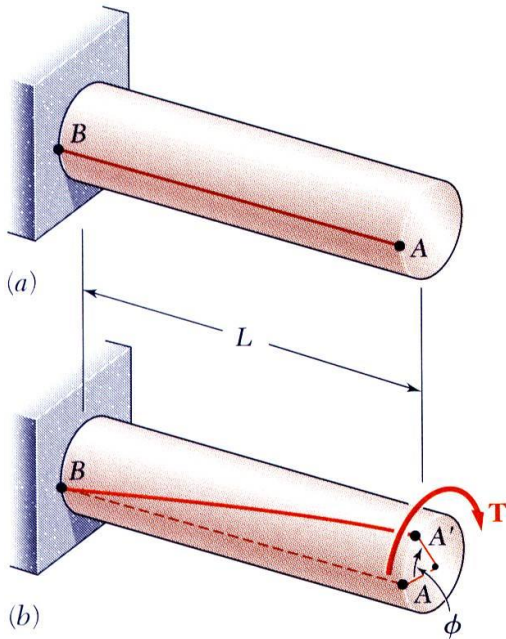
$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$
- Μολονότι το συνολικό μέτρο της ροπής λόγω των διατμητικών δυνάμεων είναι γνωστό, δεν είναι γνωστή η κατανομή των τάσεων.
- Η κατανομή των διατμητικών τάσεων είναι στατικά αόριστη – πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις παραμορφώσεις της ατράκτου.
- Σε αντίθεση με την ορθή τάση που οφείλεται στην αξονική φόρτιση, η κατανομή των διατμητικών τάσεων λόγω στρεπτικών φορτίων δεν μπορεί να υποτεθεί ομοιόμορφη.

Συνιστώσες της διάτμησης



- Η εφαρμοζόμενη ροπή στρέψης στην ατράκτο προκαλεί διατμητικές παραμορφώσεις πάνω στις επιφάνειες του στοιχείου που είναι κάθετες στον άξονα της ατράκτου.
- Οι συνθήκες ισορροπίας απαιτούν την ύπαρξη ίσων τάσεων στις επιφάνειες του στοιχείου οι οποίες σχηματίζονται από τα δυο επίπεδα που περιέχουν τον άξονα της ατράκτου.
- Η ύπαρξη αυτών των συνιστωσών διατμητικών τάσεων μπορεί ναδειχθεί με τη θεώρηση μίας ατράκτου που είναι κατασκευασμένη από ξεχωριστούς πήχεις καρφωμένους στα άκρα.
- Οι πήχεις ολισθαίνουν μεταξύ τους όταν εφαρμόζονται ίσες και αντίθετες ροπές στρέψης στα άκρα της ατράκτου.

Παραμορφώσεις σε μια άτρακτο

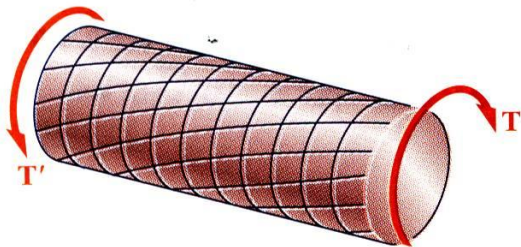


- Από παρατήρηση, η γωνία στροφής της ατράκτου είναι ανάλογη με την εφαρμοζόμενη ροπή και το μήκος της ατράκτου.

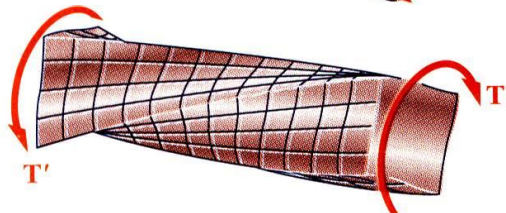
$$\phi \propto T$$

$$\phi \propto L$$

- Όταν μια κυλινδρική άτρακτος υπόκειται σε στρέψη, κάθε εγκάρσια διατομή παραμένει επίπεδη και απαραμόρφωτη.

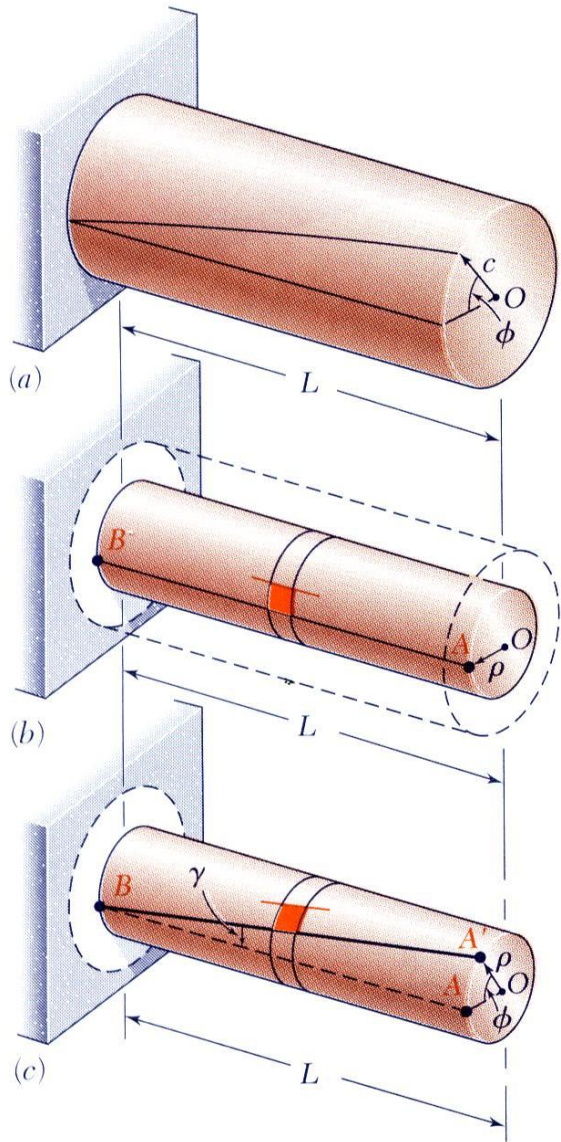


- Οι *συμπαγείς* ή *κοίλες* διατομές των ατράκτων παραμένουν επίπεδες και απαραμόρφωτες επειδή η κυκλική διατομή είναι *αξονοσυμμετρική*.



- Οι διατομές των μη κυκλικών (αξονοσυμμετρικών) ατράκτων παραμορφώνονται όταν υπόκεινται σε στρέψη.

Διατμητική παραμόρφωση



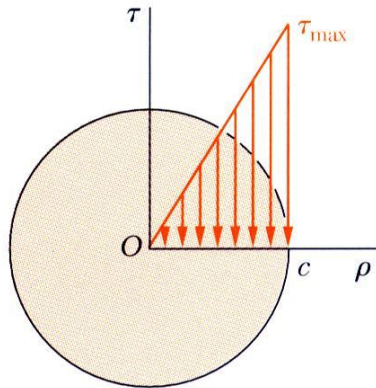
- Θεωρείστε ένα εσωτερικό μέλος της άτρακτου. Καθώς η άτρακτος υποβάλλεται σε στρεπτικό φορτίο, το εσωτερικό στοιχείο από ορθογώνιο παραμορφώνεται σε ρόμβο.
- Εφόσον τα άκρα του στοιχείου παραμένουν στο ίδιο επίπεδο, η διατμητική παραμόρφωση ισούται με την γωνία στρέψης.
- Αυτό σημαίνει ότι:

$$L\gamma = \rho\phi \quad \text{ή} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

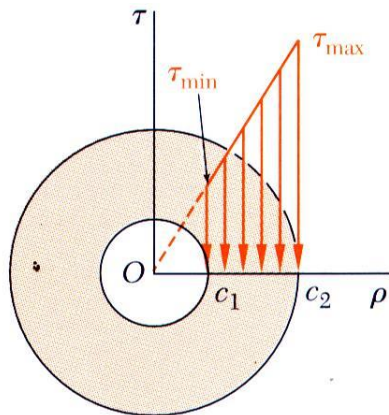
- Η διατμητική παραμόρφωση είναι ανάλογη της γωνίας στρέψης και της ακτίνας:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

Τάσεις στην ελαστική περιοχή



$$J = \frac{1}{2} \pi c^4$$



$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

J = πολική ροπή αδρανείας

- Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη εξίσωση με το μέτρο διάτμησης,

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max}$$

Ο νόμος του Hooke: $\tau = G\gamma$, επομένως

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

Οι διατμητικές τάσεις μεταβάλλονται γραμμικά με την ακτινική απόσταση από τον άξονα της ατράκτου.

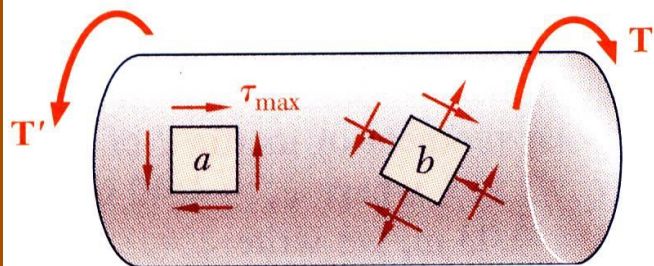
- Το άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται σε οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή της ατράκτου πρέπει να ισούται με το μέτρο T της ροπής στρέψης που ασκείται πάνω στην άτρακτο,

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{c} J$$

- Τα αποτελέσματα είναι γνωστά ως τύποι της ελαστικής στρέψης,

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

Ορθές τάσεις

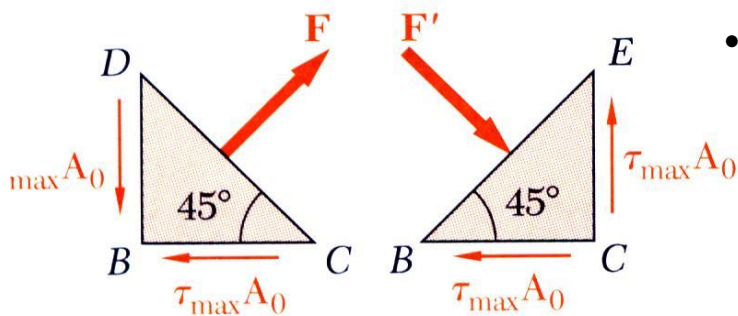


- Τα στοιχεία με έδρες παράλληλες και κάθετες στον άξονα της ατράκτου φορτίζονται μόνο με διατμητικές τάσεις. Ανάλογα με τον προσανατολισμό του στοιχείου, μπορεί να αναπτυχθεί ένας συνδυασμός ορθών και διατμητικών τάσεων.

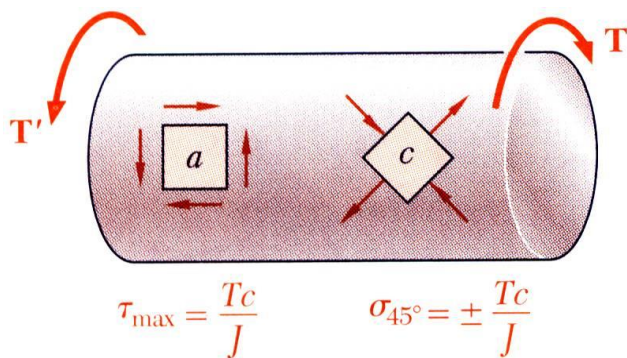
- Έστω ένα στοιχείο σε 45° με τον άξονα της ατράκτου:

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

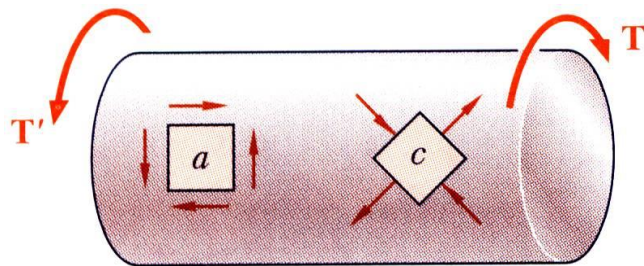
$$\sigma_{45^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$



- Το στοιχείο a βρίσκεται σε απλή διάτμηση.
- Το στοιχείο c βρίσκεται υπό εφελκυστική τάση σε δυο έδρες και υπό θλιπτική τάση στις άλλες δυο.
- Παρατηρείστε ότι όλες οι τάσεις στα στοιχεία a και c έχουν το ίδιο μέτρο.

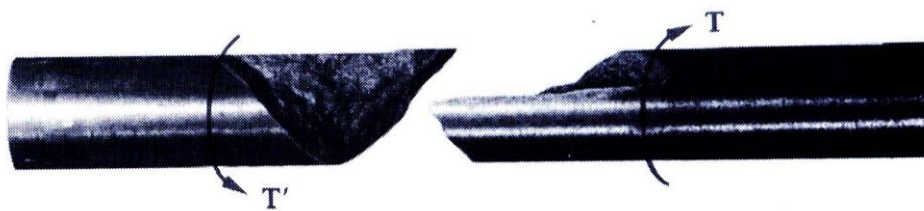
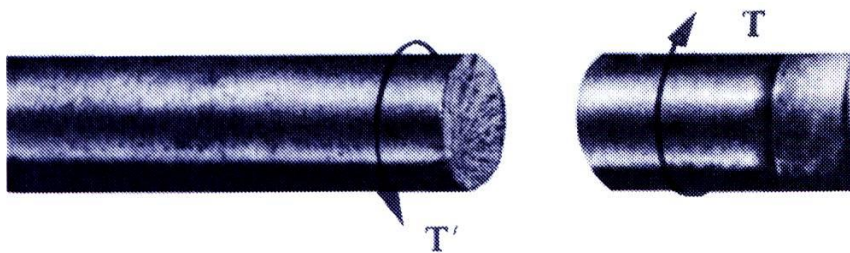


Τύποι αστοχίας σε στρέψη



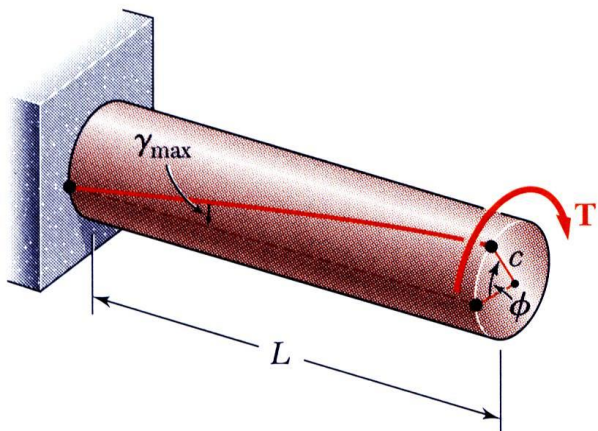
$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J}$$



- Τα *όλκιμα* υλικά γενικά αστοχούν σε διάτμηση. Τα *ψαθυρά* υλικά δείχνουν περισσότερη αντοχή σε διάτμηση από ότι σε εφελκυσμό.
- Ένα δοκίμιο από *όλκιμο* υλικό που υπόκειται σε στρέψη, αστοχεί (θραύεται) κατά μήκος ενός επιπέδου που είναι κάθετο στο διαμήκη άξονά του. (θραύση λόγω εξάντλησης της αντοχής του υλικού σε διάτμηση, αστοχία στο επίπεδο των μέγιστων διατμητικών τάσεων)
- Ένα δοκίμιο από *ψαθυρό* υλικό που υπόκειται σε στρέψη, αστοχεί (θραύεται) κατά ελικοειδή επιφάνεια η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον διαμήκη άξονα του δοκιμίου (ως προς τη διατομή). Θραύση λόγω εξάντλησης της αντοχής του υλικού σε εφελκυσμό.

Γωνία στρέψης στην ελαστική περιοχή



- Βρήκαμε ότι η γωνία στρέψης και η μέγιστη διατμητική παραμόρφωση συνδέονται ως εξής:

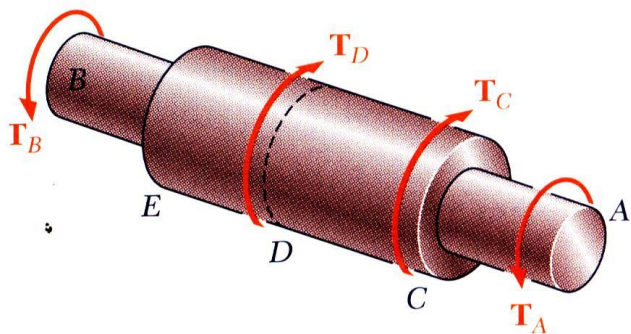
$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

- Στην ελαστική περιοχή, η διατμητική παραμόρφωση και τάση συσχετίζονται με τον νόμο του Hooke:

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

- Από τις παραπάνω εξισώσεις και επιλύοντας ως προς την γωνία στρέψης, προκύπτει ότι:

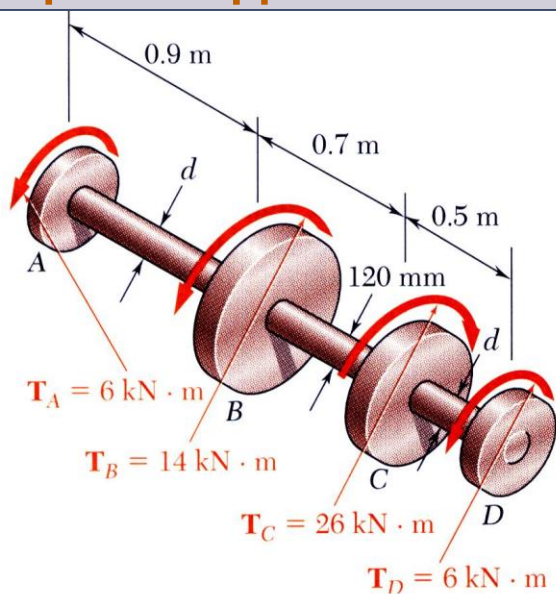
$$\phi = \frac{TL}{JG}$$



- Εάν η ροπή στρέψης ή η διατομή της ατράκτου μεταβάλλεται κατά μήκος της ατράκτου, τότε η ολική γωνία στρέψης υπολογίζεται από το άθροισμα των γωνιών στρέψης του κάθε μέλους.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

Παράδειγμα 1



Η άτρακτος BC είναι κοίλη με εσωτερική και εξωτερική διάμετρο 90 mm και 120 mm , αντίστοιχα. Οι άτρακτοι AB και CD είναι συμπαγείς με διάμετρο d . Για την φόρτιση του Σχήματος, να προσδιοριστεί (α) η ελάχιστη και η μέγιστη διατμητική τάση στην άτρακτο BC , (β) η απαιτούμενη διάμετρος d των ατράκτων AB και CD , αν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση σε αυτές τις ατράκτους είναι 65 MPa .

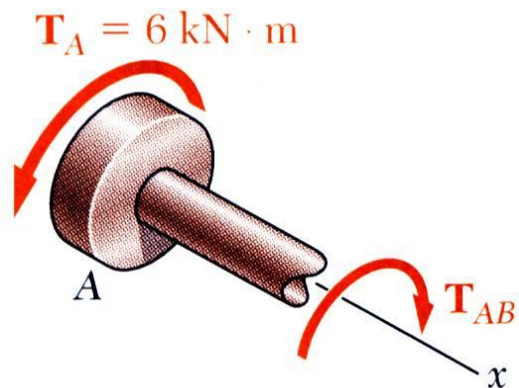
ΛΥΣΗ:

- Πραγματοποιούμε εγκάρσιες τομές στις ατράκτους AB και BC και εφαρμόζουμε τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας για να υπολογίσουμε τις ροπές στρέψης.
- Εφαρμόζουμε τον τύπο της ελαστικής στρέψης για να υπολογίσουμε την ελάχιστη και μέγιστη τάση στην κοίλη άτρακτο BC .
- Έχοντας ως δεδομένο την επιτρεπόμενη διατμητική τάση και την εφαρμοζόμενη ροπή στρέψης, επιλύουμε ως προς την ζητούμενη διάμετρο από τον τύπο της ελαστικής στρέψης.

Παράδειγμα 1 (2)

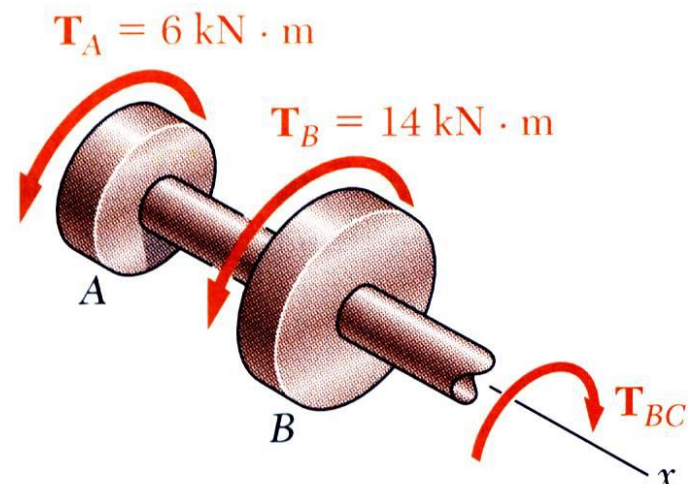
ΛΥΣΗ:

- Πραγματοποιούμε εγκάρσιες τομές στις ατράκτους AB και BC και εφαρμόζουμε τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας για να υπολογίσουμε τις ροπές στρέψης.



$$\sum M_x = 0 = (6\text{kN}\cdot\text{m}) - T_{AB}$$

$$T_{AB} = 6\text{kN}\cdot\text{m} = T_{CD}$$

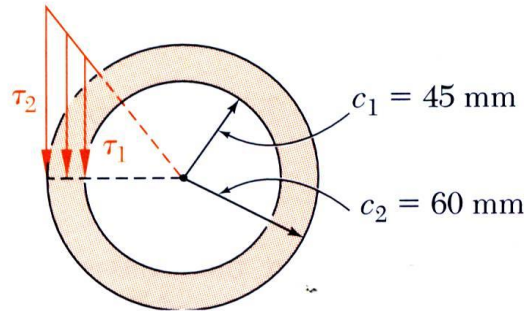


$$\sum M_x = 0 = (6\text{kN}\cdot\text{m}) + (14\text{kN}\cdot\text{m}) - T_{BC}$$

$$T_{BC} = 20\text{kN}\cdot\text{m}$$

Παράδειγμα 1 (3)

- Εφαρμόζουμε τον τύπο της ελαστικής στρέψης για να υπολογίσουμε την ελάχιστη και μέγιστη τάση στην κοίλη άτρακτο BC .



$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.060)^4 - (0.045)^4]$$

$$= 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$= 86.2 \text{ MPa}$$

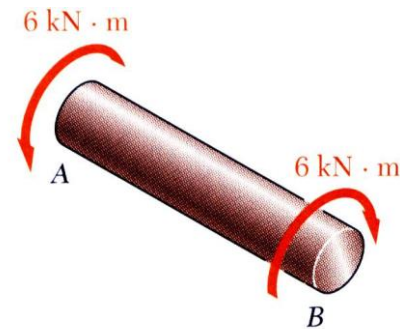
$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

- Έχοντας ως δεδομένο την επιτρεπόμενη διατμητική τάση και την εφαρμοζόμενη ροπή στρέψης, επιλύουμε ως προς την ζητούμενη διάμετρο από τον τύπο της ελαστικής στρέψης.



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

$$c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$65 \text{ MPa} = \frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{\frac{\pi}{2} c^3}$$

$$d = 2c = 77.8 \text{ mm}$$