

Αντοχή των Υλικών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή – Βασικές έννοιες
Ορθή και διατμητική τάση

*Σύμφωνα με το βιβλίο του
Δρ. Παναγιώτη Α. Βουθούνη*



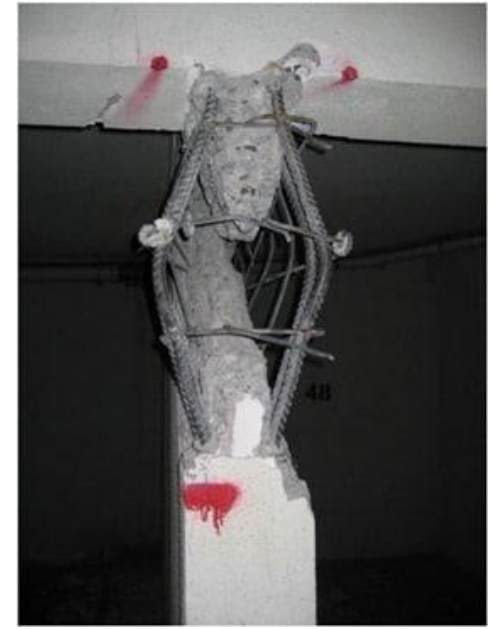
ΔΙΕΘΝΕΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ζωή Σ. Μεταξά

Επίκουρη Καθηγήτρια
zmetaxa@chem.ihu.gr

Η παρακάτω παρουσίαση είναι βασισμένη στο βιβλίο με τίτλο «Αντοχή των υλικών – Μηχανική του παραμορφωσίμου σώματος» του Δρ. Παναγιώτη Α. Βουθούνη, 2019. Ευχαριστώ θερμά τον Δρ. Βουθούνη για την παροχή των εικόνων και κειμένων από το βιβλίο του.

Γιατί
Μελετάμε
την Αντοχή
των
Υλικών???



Αντικείμενο της Αντοχής των Υλικών

«**Τεχνική Μηχανική** είναι η επιστήμη, που μελετά την απόκριση της ύλης σε εξωτερικά αίτια»

Τεχνική Μηχανική του
απαραμόρφωτου στερεού
(Μηχανική του απολύτου στερεού)

Μηχανική του παραμορφώσιμου
σώματος
(Θεωρία ελαστικότητας και αντοχή των
υλικών)

Πρέπει να γνωρίζουμε μέχρι ποιο όριο μπορούμε να φορτίσουμε τα υλικά έναντι του κινδύνου θραύσης και της υπερβολικής παραμόρφωσης



Στόχοι της Αντοχής των Υλικών:



¹ Η μελέτη της αντοχής των δομικών μελών που απαρτίζουν τα αυτοκίνητα, βασίζονται και στις γνώσεις του παρόντος μαθήματος

Να προσδιορίσει τα επικίνδυνα όρια φόρτισης στα είδη των καταπονήσεων και να καθορίσει τα επιτρεπτά όρια φόρτισης για κάθε είδος της.

Να καθορίσει το πλέον κατάλληλο σχήμα και τις διαστάσεις των φορέων έτσι ώστε να είναι σε θέση να παραλάβουν με ασφάλεια και κατά τον οικονομικότερο δυνατό τρόπο τη φόρτιση.

Να υπολογίσει το μέγιστο δυνατό φορτίο το οποίο μπορεί με ασφάλεια να αναλάβει ένας φορέας και να ελέγξει κατά πόσο είναι ασφαλής έναντι δεδομένης φόρτισης (στατικός έλεγχος), και τέλος να ελέγξει κατά πόσο οι προκληθείσες παραμορφώσεις βρίσκονται εντός των αποδεκτών ορίων.

“Αντοχή Υλικών είναι η Επιστήμη που υποδεικνύει αναλυτικές μεθόδους για τον υπολογισμό της αντοχής, της ακαμψίας και της ευστάθειας των μελών της κατασκευής, με γνώμονα το κόστος να είναι το ελάχιστο δυνατό

Παραδοχές Αντοχής των Υλικών:

- Σώματα: **ισότροπα, ομογενή και συνεχή**

Ίδιες ιδιότητες προς όλες τις
κατευθύνσεις

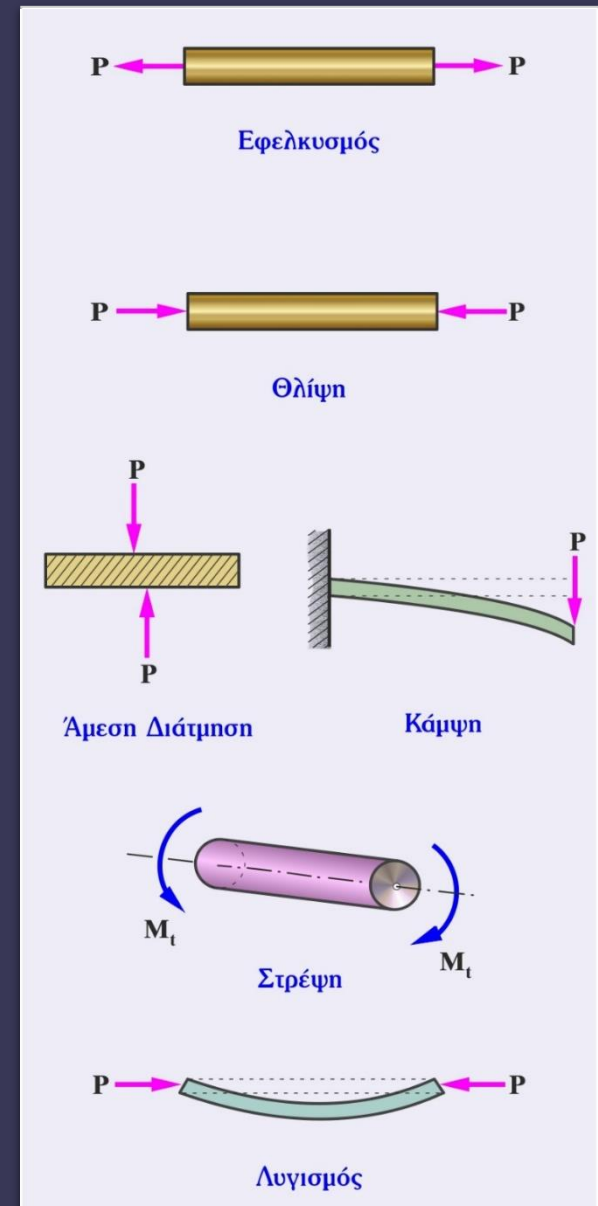
Ίδιες ιδιότητες σε όλα
του τα σημεία

Χωρίς κενά ή ασυνέχειες, δομικοί
λίθοι στενά συνδεδεμένοι

- Οι επιβαλλόμενες **εξωτερικές δυνάμεις αυξάνονται αρκετά αργά** (στατικές ή ημιστατικές)
- Οι παραμορφώσεις επέρχονται ή αναιρούνται συγχρόνως με την επιβολή ή αίρεση των εξωτερικών φορτίων
- Δεν προϋπάρχουν εσωτερικές δυνάμεις ή τάσεις
- Οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές, συγκριτικά με τις εξωτερικές διαστάσεις

Είδη καταπονήσεων:

- ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ: Σε ράβδο ή δοκό επενεργούν 2 δυνάμεις ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς, οι οποίες τείνουν να το διασπάσουν.
- ΘΛΙΨΗ: Σε ράβδο ή δοκό επενεργούν 2 δυνάμεις ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς, οι οποίες τείνουν να το συνθλίψουν.
- ΔΙΑΤΜΗΣΗ: Σε ένα σώμα επενεργούν 2 δυνάμεις ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς, ώστε να είναι κάθετες στον άξονα του
- ΚΑΜΨΗ: Η δύναμη ενεργεί κάθετα στον άξονα της δοκού, αναπτύσσονται ροτές κάμψης και προκαλείται καμπύλωση της δοκού.
- ΣΤΡΕΨΗ: Οι δυνάμεις αποτελούν ζεύγος με επίπεδο κάθετο στον άξονα του σώματος το οποίο τείνουν να περιστρέψουν
- ΛΥΓΙΣΜΟΣ: Δράση δυνάμεων όμοια με τη θλίψη και παραμορφώσεις όμοιες με την κάμψη. Ιδιαίτερος τρόπος καταπόνησης.
- Σύνθετες καταπονήσεις.....



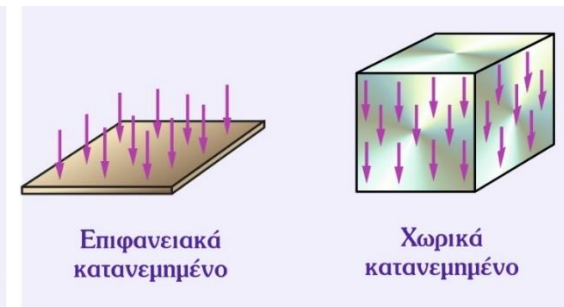
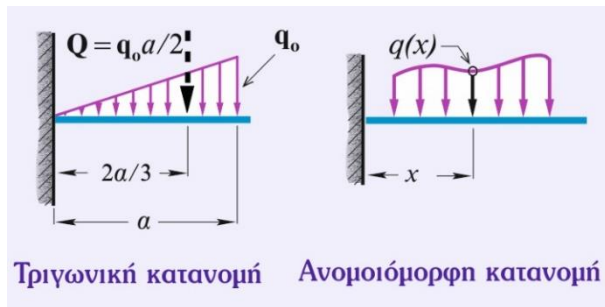
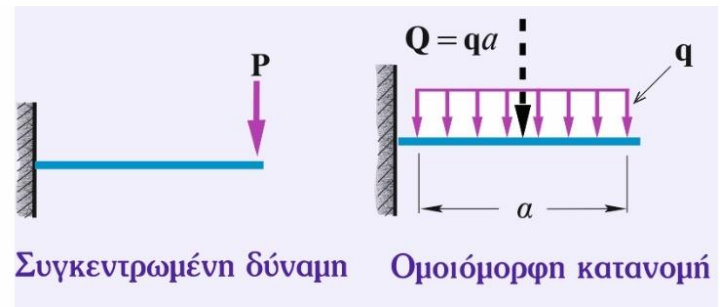
Είδη εξωτερικών φορτίων:



^{1.} Το βάρος της αθλήτριας εφαρμόζεται σημειακά στη δοκό μέσω των χεριών της

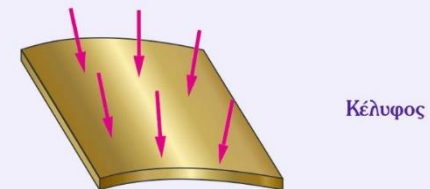
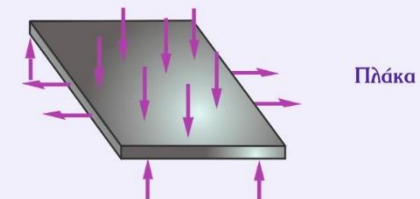
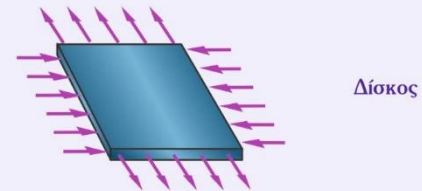
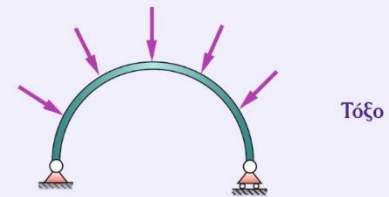
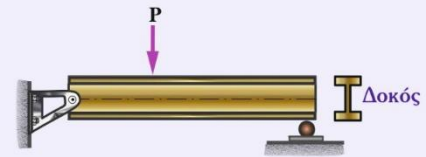


^{2.} Το βάρος του ανθρώπου και του ποδηλάτου (αθροιστικά) μεταβιβάζονται από τους τροχούς του στη γέφυρα



Είδη φορέων:

- «**Φορέας**» ονομάζεται κάθε σώμα ή κατασκευή που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία (δυνάμεις και ροπές) τα οποία μεταφέρει στις στηρίξεις του διαμέσου των οποίων καταλήγουν στο έδαφος



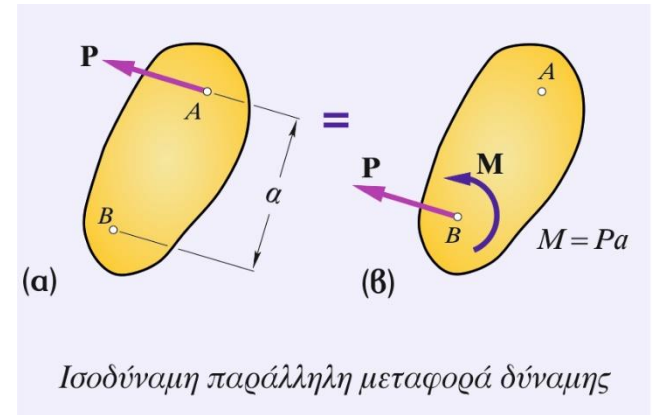
Βασικές προτάσεις στατικής

Αξονική μετατόπιση δύναμης:

- Μια δύναμη P μπορεί να μεταφερθεί ισοδύναμα σε οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ενέργειάς της

Παράλληλη μεταφορά δύναμης:

- Είναι ισοδύναμη με τη δύναμη στο νέο σημείο συν την προκύπτουσα ροπή μεταφοράς της



Μηδενική ροπή ως προς άξονα:

- Αν ο φορέας μιας δύναμης τέμνει έναν άξονα ή είναι παράλληλος με αυτόν τότε η ροπή της ως προς αυτόν είναι μηδενική

Διάγραμμα ελευθέρου σώματος:

- Το σχήμα που απεικονίζει τον φορέα με τα εξωτερικά επιβεβλημένα φορτία και τις αντιδράσεις στήριξης

Μέθοδος των τομών (Ritter)

Όταν ένα σώμα ισορροπεί, θα ισορροπεί επίσης και κάθε τμήμα του που νοητά αποκόπτεται από αυτό

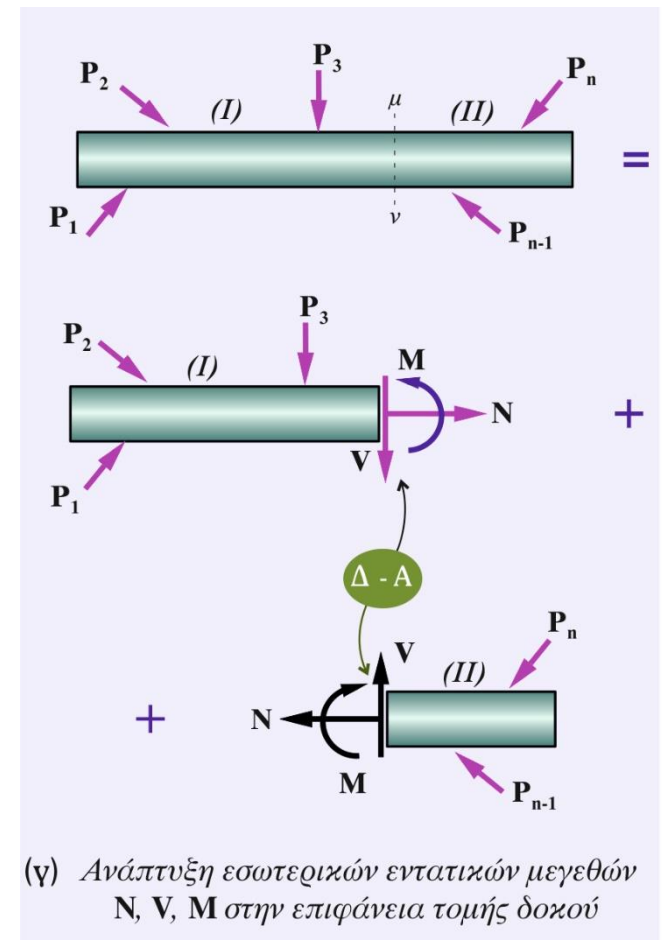
² Η μελέτη για την κατασκευή γεφυρών, ξεκινάει από τις γνώσεις του παρόντος μαθήματος

- N : Αξονική δύναμη
- V : Τέμνουσα δύναμη
- M : Ροπή κάμψης

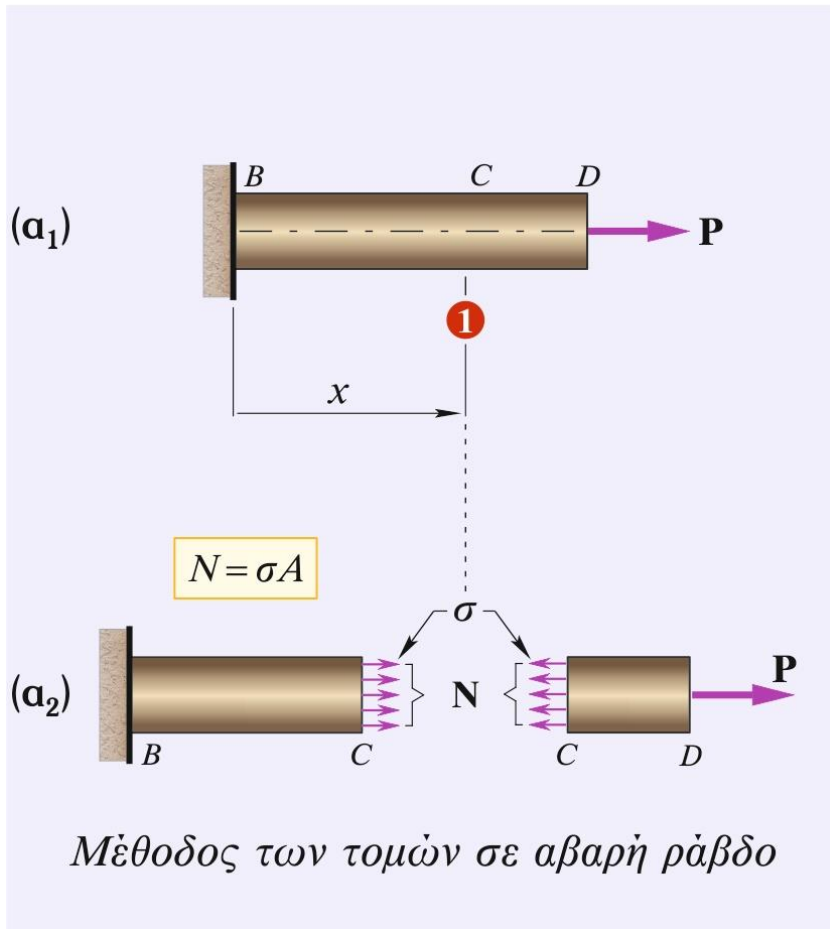
Δύο τμήματα μιας κατασκευής, πριν αποχωριστούν μεταξύ τους λόγω της **θραύσης**, συγκρατούνται ενωμένα με *εσωτερικές δυνάμεις* τις οποίες αναπτύσσουν οι δομικοί λίθοι του ενός τμήματος με τους δομικούς λίθους του άλλου.

Θραύση επέρχεται επειδή οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις ξεπέρασαν σε μέτρο κάποιο χαρακτηριστικό όριο το οποίο μπορεί να αντέξει το συγκεκριμένο υλικό (**τάση θραύσης**).

Για να ελέγχουμε την αντοχή κάθε σώματος-μέλους μιας κατασκευής, πρέπει να μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέτρο των εσωτερικών δυνάμεων σε αυθαίρετες τομές.



Ορθή τάση



- Νοητή τομή σε τυχαίο σημείο C
- Για να ισορροπεί το δεξιό τμήμα της τομής, αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη N, ίσου μέτρου και φοράς με την εξωτερική δύναμη P
- Στο άκρο C αναπτύσσονται “οι απειροστές εσωτερικές δυνάμεις” που ονομάζονται “τάσεις”, οι οποίες οφείλονται στις δράσεις των σωματιδίων του αριστερά τμήματος BC, επί εκείνων που ήταν σε επαφή και παρέμειναν τελικά στο δεξιό τμήμα CD μετά την τομή.
- Οι ορθές τάσεις υποθέτουμε ότι είναι:
 - Ομοιόμορφα κατανομημένες σε όλη την επιφάνεια
 - Κάθετες στην επιφάνεια

$$\text{Ορθή Τάση: } \sigma = \frac{N}{A}$$

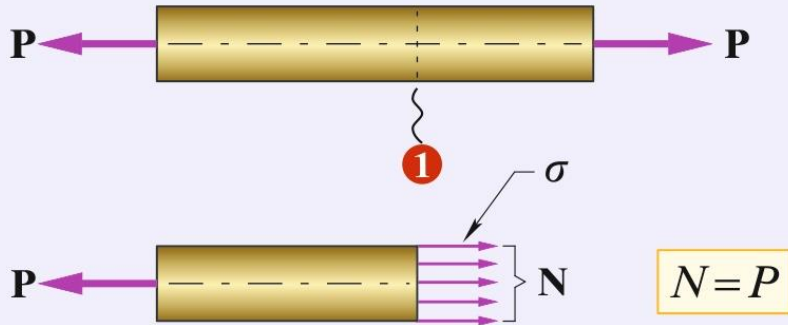
A = εμβαδόν εγκάρσιας διατομής της ράβδου

σ = ορθή τάση

N = εσωτερική αξονική δύναμη ίση με P

Ορθή Τάση: $\sigma = \frac{N}{A}$

Ορθή τάση

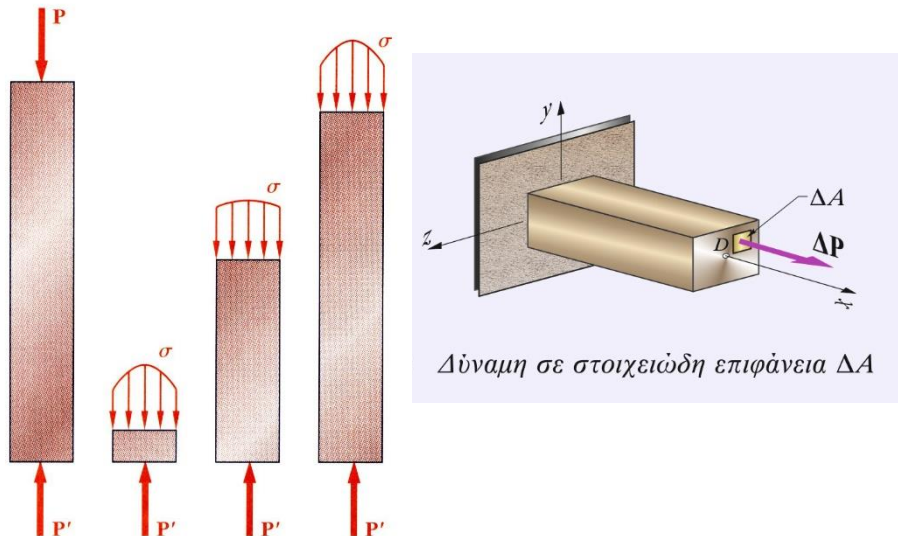


(α) Αξονική φόρτιση ράβδου και τομή της

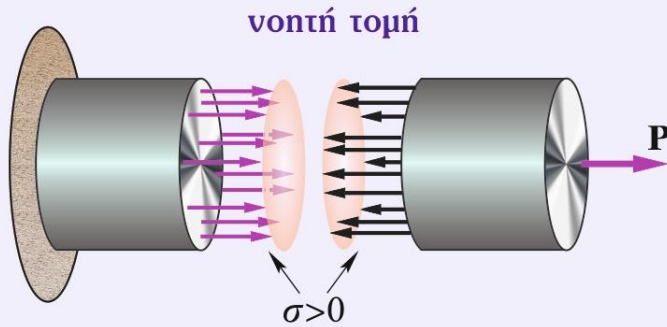
- Μονάδες: $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$, $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$, $\text{kp/cm}^2 = \text{at}$ ($g=9.81 \text{ m/s}^2$, $1 \text{ kp}=9.81 \text{ N}$, $1 \text{ kp} \sim 10 \text{ N}$), t/m^2
- Ορθή τάση σε συγκεκριμένο σημείο της διατομής.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\delta P}{dA} \quad \sigma_{ave} = \frac{P}{A}$$

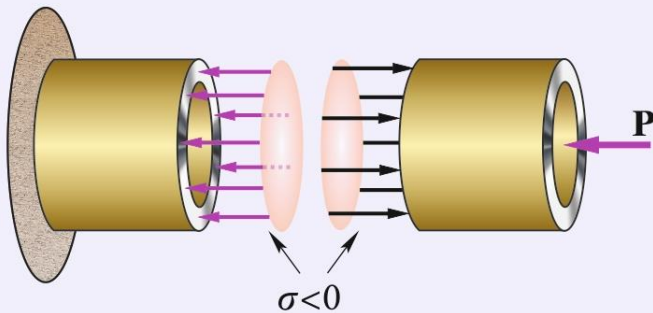
- Η **τάση** έχει τα χαρακτηριστικά της δύναμης, είναι δηλαδή **διάνυσμα**, και μπορεί να αναλυθεί σε **συνιστώσες**.
- Επενεργεί **κάθετα στη διατομή** και δεχόμαστε ότι έχει **ίδια τιμή σε κάθε σημείο της** (ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων)



Ορθή τάση



(γ_1) Εφελκυστική τάση (θετική) σε κύλινδρο

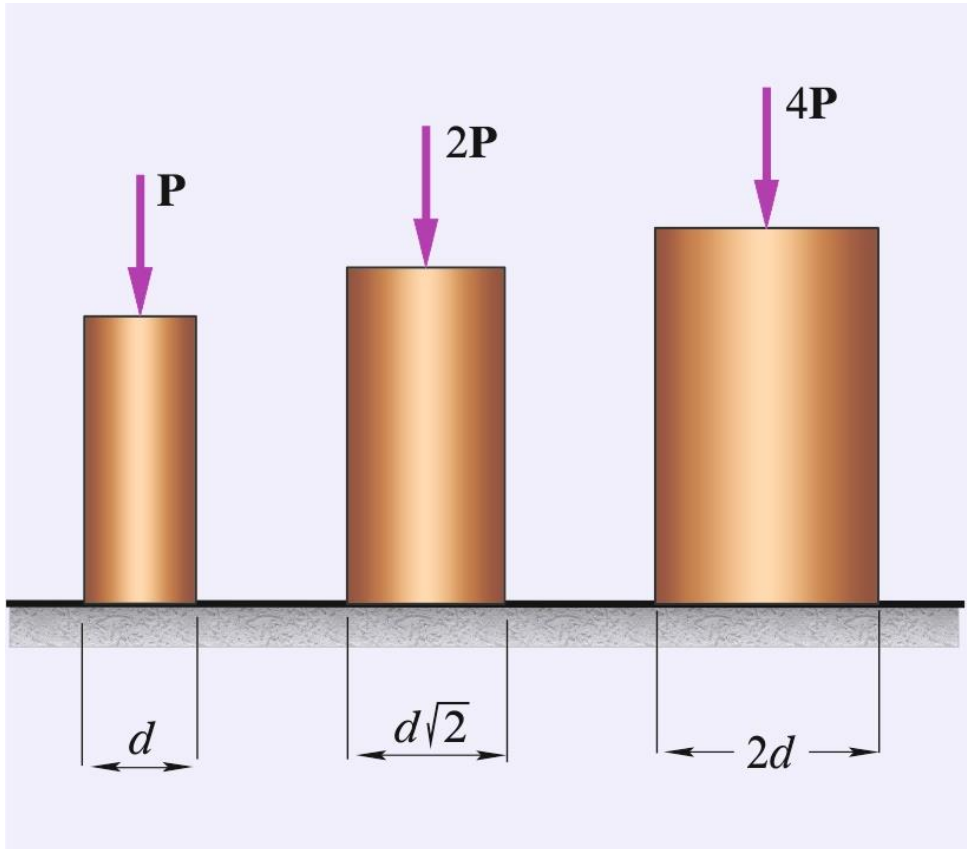


(γ_2) Θλιπτική τάση (αρνητική) σε σωλήνα

- Όταν η τάση σ προκύπτει από εφελκυστική δύναμη ονομάζεται **ορθή εφελκυστική τάση** ή απλά εφελκυστική τάση, θεωρείται θετική και προσημαίνεται με +

- Εάν η δύναμη επενεργεί **θλιπτικά**, η τάση ονομάζεται **ορθή θλιπτική τάση** ή απλά θλιπτική τάση, θεωρείται αρνητική και προσημαίνεται με -

Τι κοινό έχουν οι παρακάτω ράβδοι?



$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1}$$

$$A_1 = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$\sigma_1 = \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{2P}{A_2}$$

$$A_2 = \pi \frac{2d^2}{4}$$

$$\sigma_2 = \frac{4P}{\pi d^2}$$

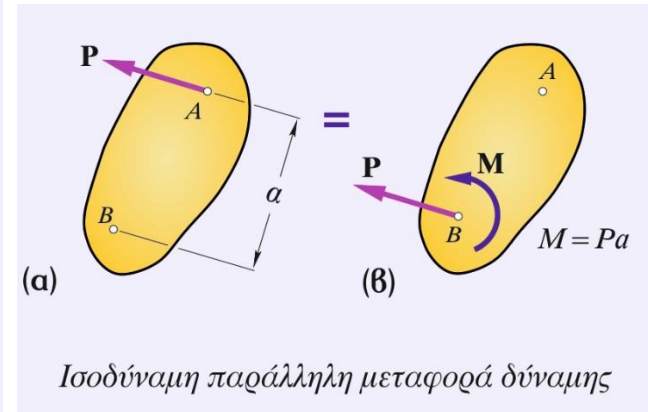
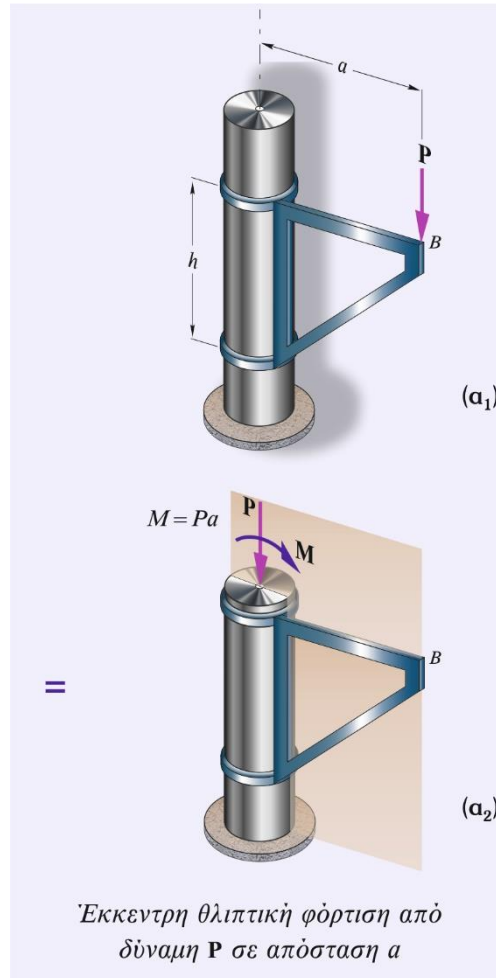
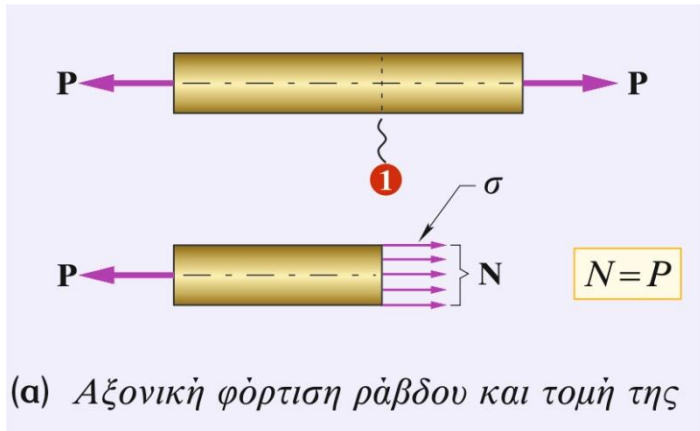
$$\sigma_3 = \frac{4P}{A_3}$$

$$A_3 = \pi \frac{16d^2}{4}$$

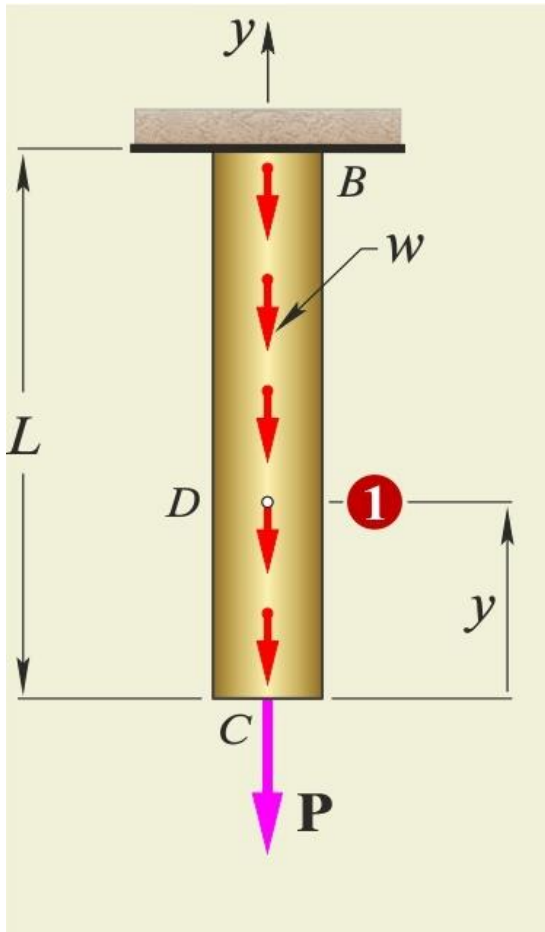
$$\sigma_3 = \frac{4P}{\pi d^2}$$

- Ίδια μέση ορθή τάση

Κεντρική και έκκεντρη φόρτιση



Παράδειγμα 2 στον Πίνακα



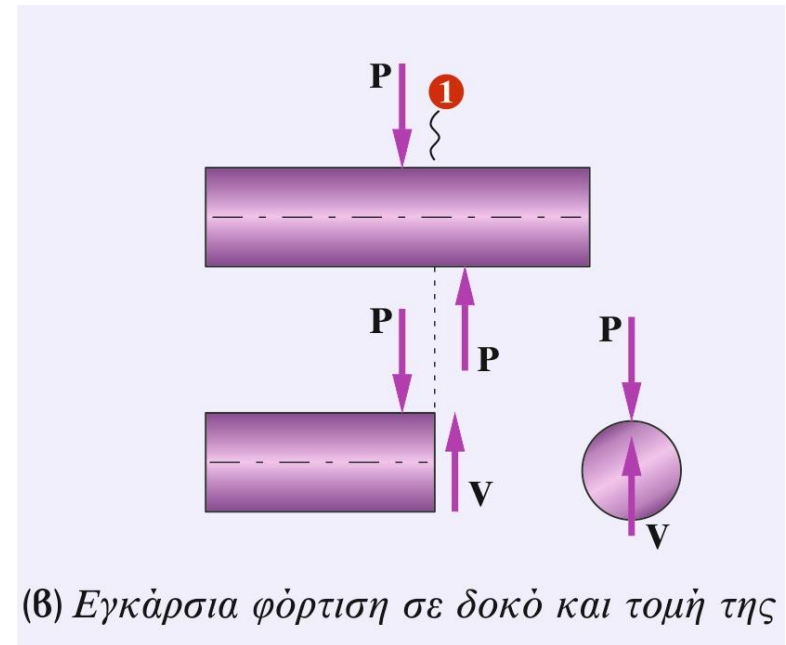
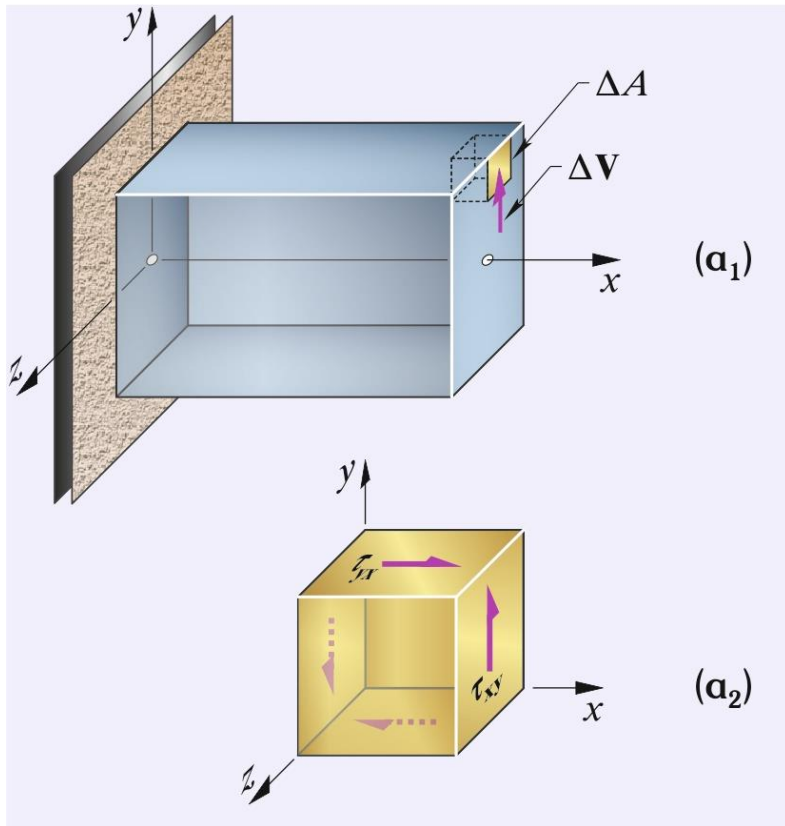
Χαλύβδινη ράβδος BC , σταθερού εμβαδού διατομής $A = 100 \text{ cm}^2$, είναι πακτωμένη κατακόρυφα και φέρει κεντροβαρική δύναμη $P = 10 \text{ kN}$.

Δίνεται το ειδικό βάρος του χάλυβα $\gamma = 78 \text{ kN/m}^3$ και $L = 1 \text{ m}$.

Να βρεθεί η αναπτυσσόμενη ορθή τάση σε όλη τη ράβδο αν:

- Αμελήσουμε το ίδιο βάρος της
- Δεν αμελήσουμε το ίδιο βάρος της.

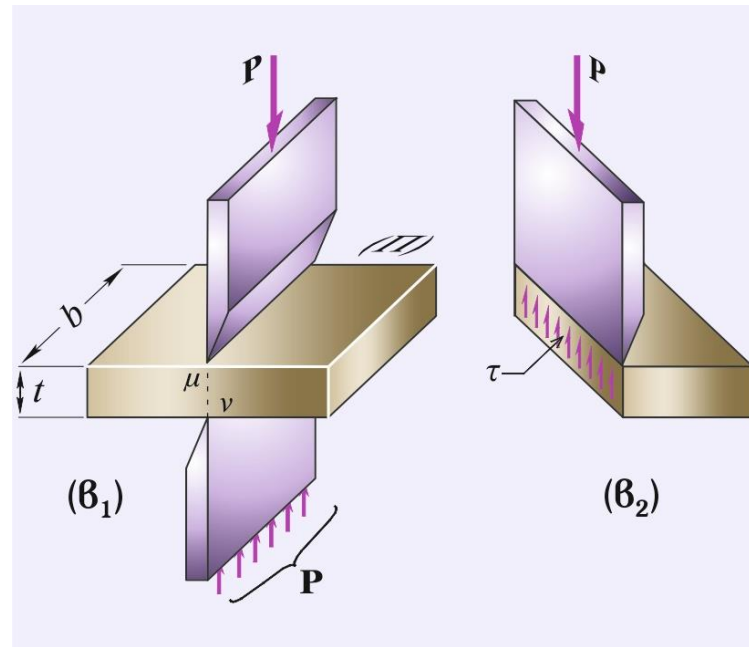
Διατμητική τάση



Σε περιοχή σημείου θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια ΔA , στην οποία ασκείται τέμνουσα δύναμη ΔV . Η **διατμητική τάση** (*shear stress*) τ ορίζεται ως:

$$\text{Διατμητική τάση: } \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A} = \frac{dV}{dA}$$

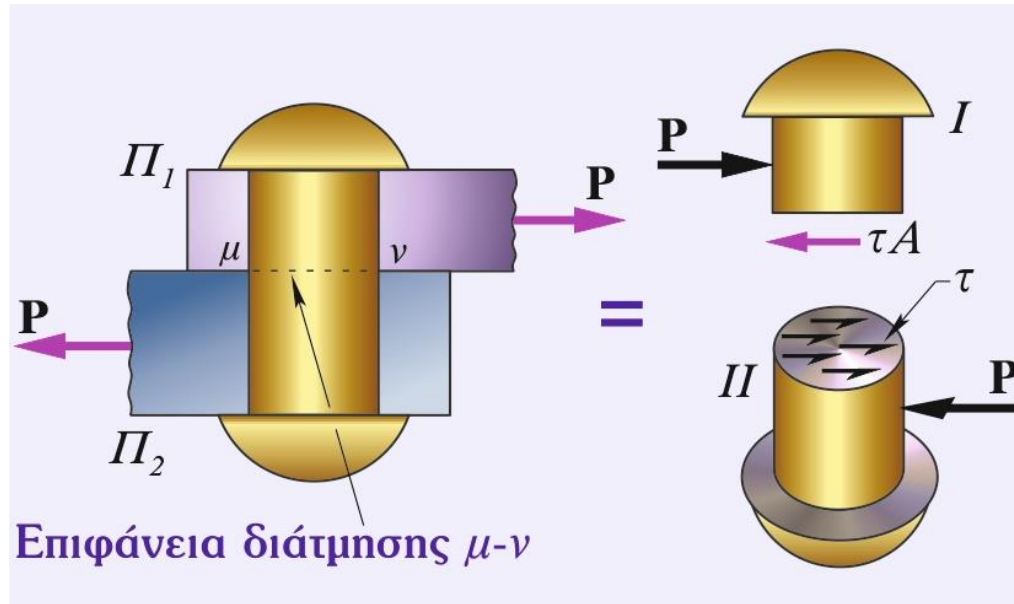
Άμεση (ή απλή) διάτμηση



- Όταν δύο αντίθετες δυνάμεις P τείνουν να προκαλέσουν, με τη βοήθεια κατάλληλου μηχανικού ψαλιδιού, σε μεταλλική πλάκα «διάτμηση-απότμηση», το υλικό αναπτύσσει στην επιφάνεια ψαλιδισμού μ - ν (εμβαδού $A=b*t$) μέση **διατμητική τάση** τ , η οποία είναι:

$$\text{Μέση διατμητική τάση απότμησης: } \tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{bt}$$

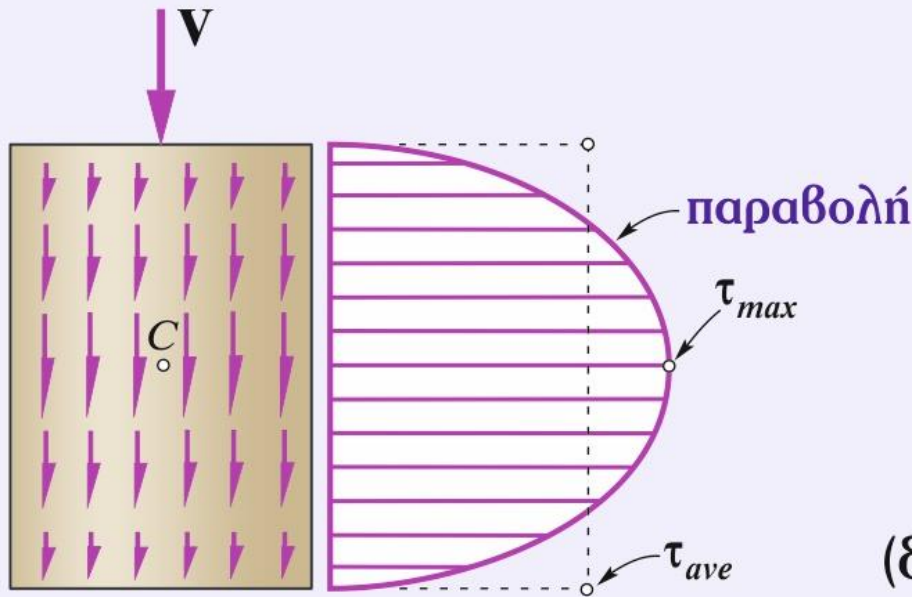
Άμεση (ή απλή) διάτμηση



- Ένας ήλος ενώνει δύο μεταλλικά ελάσματα (Π_1 και Π_2) στα οποία ασκείται στο καθένα (εφελκυστική) δύναμη P , με αποτέλεσμα ο ήλος να καταπονείται σε άμεση διάτμηση. Η διατμητική τάση τ που αναπτύσσεται στην «κρίσιμη επιφάνεια» διάτμησης $\mu-\nu$ εμβαδού $A=\pi d^2/4$ (d =διάμετρος ήλου) είναι:

Μέση διατμητική τάση (μονότμητού) ήλου: $\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi d^2/4}$

Έμμεση διάτμηση λόγω τέμνουσας

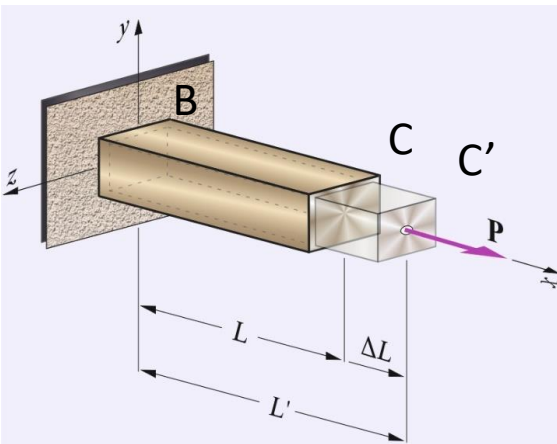


- Η τέμνουσα V προκαλεί ανάπτυξη διατμητικών τάσεων οι οποίες δε είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά το ύψος της διατομής.
- Είναι μηδενικές στα άκρα και έχουν μέγιστη τιμή στο ύψος του γεωμετρικού κέντρου C .

Μεση διατμητική τάση λόγω τέμνουσας:

$$\tau_{ave} = \frac{V}{A}$$

Ορθή τροπή (ή παραμόρφωση)



(α) Επιμήκυνση εφελκυστικής ράβδου

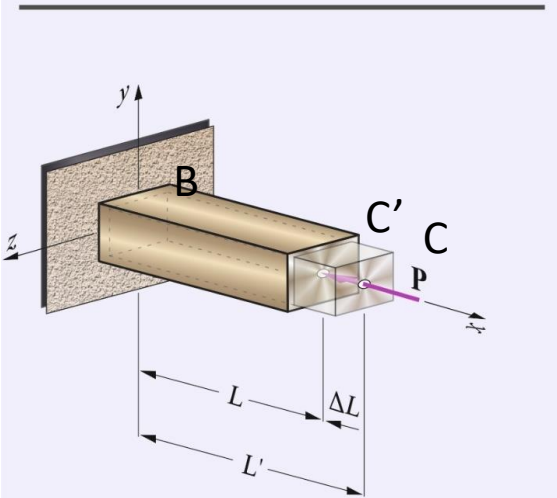
- Αν στη αβαρή ράβδο BC του σχήματος αρχικού μήκους L επιβληθεί εφελκυστικό φορτίο P , θα παρατηρήσουμε ότι το σημείο C θα μετατοπιστεί δεξιότερα στη θέση C' .
- Η “μετατόπιση” (*displacement*) $\Delta L = CC'$, ή και δ , στο εφελκυσμό ονομάζεται **επιμήκυνση** (*elongation*) και είναι $\Delta L > 0$. Το τελικό μήκος είναι: $L' = L + \Delta L$
- Αντίστοιχα, αν στη ράβδο επιβληθεί θλιπτικό φορτίο P , το σημείο C μετατοπίζεται αριστερότερα στη θέση C' . Η “μετατόπιση” $\Delta L = CC'$ ονομάζεται **επιβράχυνση** (*shortening*) και είναι $\Delta L < 0$.

Ορθή τροπή (*normal strain*) στη διεύθυνση του φορτίου:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L}$$

- Λόγος μηκών \rightarrow αδιάστατο μέγεθος \rightarrow αναφέρεται σε %, ‰
- Εφελκυσμός: $\varepsilon > 0$ (ανηγγμένη επιμήκυνση),
Θλιψη: $\varepsilon < 0$ (ανηγγμένη επιβράχυνση)

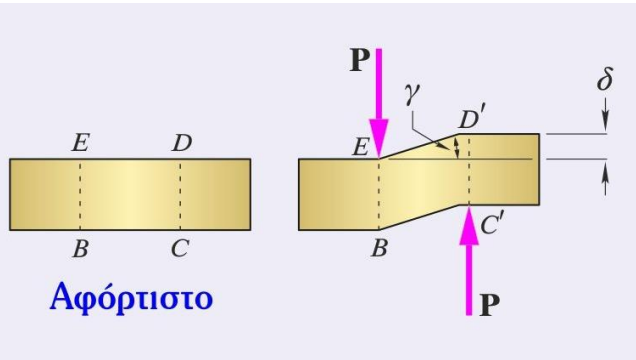
$$\text{Ορισμός ορθής τροπής } \varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$



(β) Επιβράχυνση θλιβόμενης ράβδου

Αν ο διαμήκης άξονας της ράβδου έχει διεύθυνση x η ορθή τάση και τροπή συμβολίζονται: σ_x και ε_x

Γωνιακή παραμόρφωση (ή τροπή)

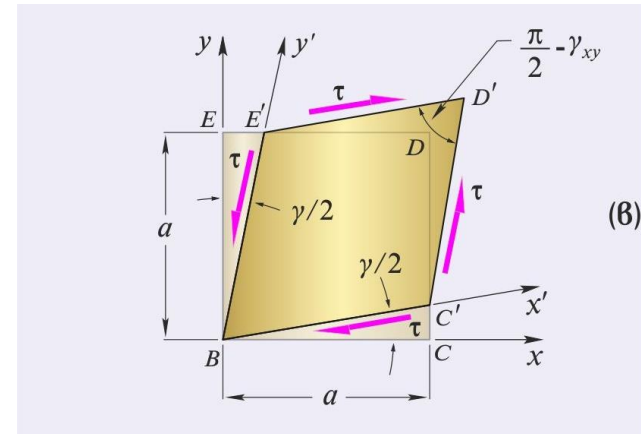


- Όταν μια δοκός φορτίζεται εγκάρσια, αυτή παραμορφώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $BCDE$ να μετασχηματιστεί σε πλάγιο.

- Υπό την επίδραση της τ , παρατηρείται στρέβλωση του ορθογωνίου στο πλάγιο παραλληλόγραμμο $BC'D'E'$. Το μέτρο της στρέβλωσης αυτής είναι η **γωνιακή παραμόρφωση**, ή **γωνία διάτμησης** ή **διατμητική τροπή** (*shear strain*), γ

Ορισμός γωνιακής παραμόρφωσης

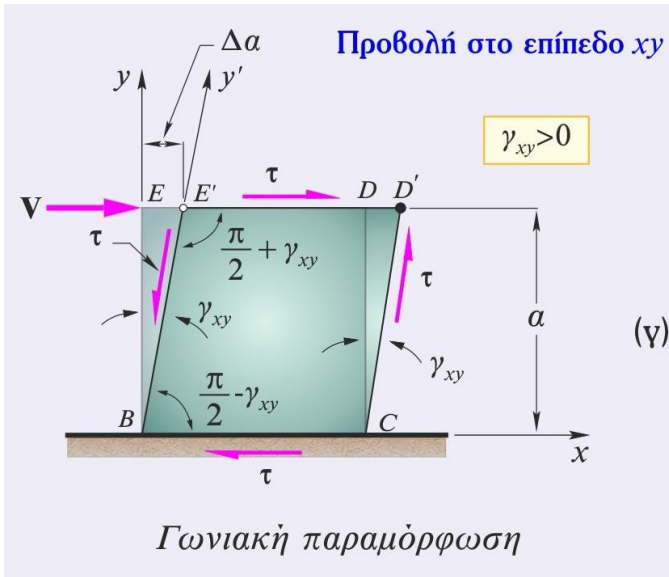
$$\gamma = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \approx \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{(CC')}{(BC)} + \frac{(EE')}{(BE)}$$



Καθαρή ή απλή διάτμηση

Για πολύ μικρές τιμές της γωνίας γ : $\tan \gamma \approx \sin \gamma \approx \gamma$ (σε rad)

Γωνιακή παραμόρφωση λόγω τέμνουσας



- Στο εσωτερικό ενός σώματος, που επενεργεί μόνο η τέμνουσα V , θεωρούμε ένα στοιχείο πλευράς α . Στις έδρες επενεργούν μόνο οι διατμητικές τάσεις τ .
- Οι διατμητικές τάσεις σχεδιάζονται περιμετρικά του στοιχείου ώστε ανά δύο ή να κατευθύνονται στην κοινή ακμή της διέδρου γωνίας ή και οι δύο να απομακρύνονται από αυτή.
- Και οι τέσσερις ίσες κατά μέτρο μεταξύ τους
- Με την επενέργεια των διατμητικών τάσεων σχηματίζεται ο ρόμβος $BCD'E'$
- Οι απέναντι γωνίες B και D μειώθηκαν κατά γ_{xy} ενώ οι άλλες δύο C και E αυξήθηκαν κατά γ_{xy}

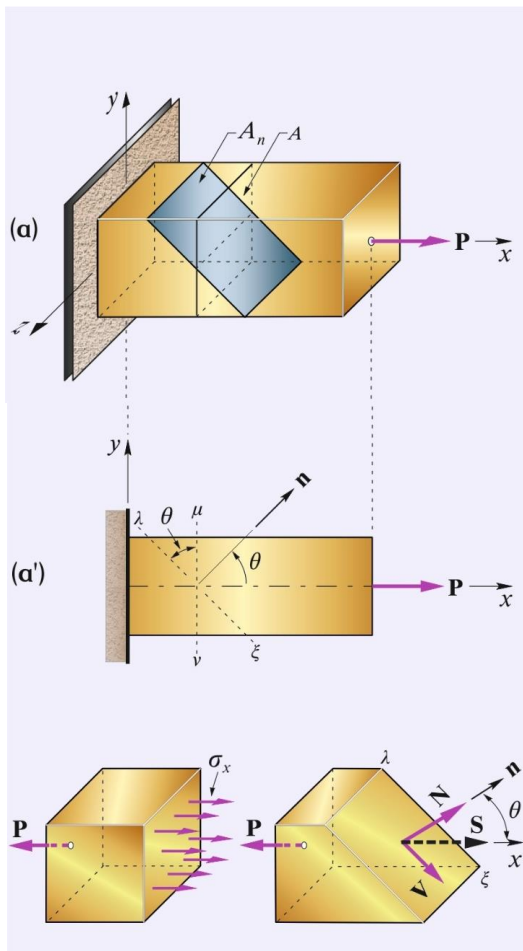
γ θετική όταν οι θετικοί ημιάξονες x και y πλησιάζουν μεταξύ τους μετά την παραμόρφωση και αρνητική όταν αυτοί απομακρύνονται

Γωνία διάτμησης ή διατμητική τροπή:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \approx \tan \gamma = \frac{(DD')}{(CD)} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad [\gamma \text{ σε rad}]$$

Παραμορφωσιακό αποτέλεσμα τάσεων: Οι ορθές τάσεις προκαλούν μόνον μεταβολές μηκών (και κατ' επέκταση ορθές παραμορφώσεις), ενώ οι διατμητικές τάσεις μόνον γωνιακές μεταβολές (στρεβλώσεις)

Τάσεις σε πλάγιες τομές εφελκυόμενης ράβδου



- Θεωρούμε πλάγια τομή λ-ξ εμβαδού A_n η οποία σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη τομή μ-ν εμβαδού A .

- Δ.Ε.Σ.

$$N = P \cos \theta \quad , \quad V = -P \sin \theta$$

- Οι μέσες τιμές των ορθών και διατμητικών τάσεων στη λοξή τομή λ-ξ είναι:

$$\sigma_n = \frac{N}{A_n} = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau_n = \frac{V}{A_n} = \frac{-P \sin \theta}{A / \cos \theta} = \frac{-P}{A} \sin \theta \cos \theta$$

από τις $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$

Ορθή και διατμητική τάση σε κεκλιμένη κατά θ διατομή:

$$\sigma_n = \sigma_\theta = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) = \sigma_x \cos^2 \theta \quad ,$$

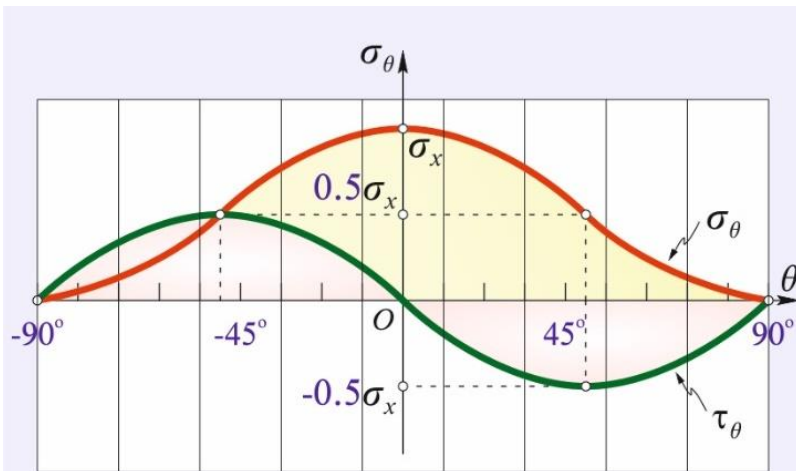
$$\tau_n = \tau_\theta = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

Τάσεις σε πλάγιες τομές εφελκυόμενης ράβδου

Ορθή και διατμητική τάση σε κεκλιμένη κατά θ διατομή:

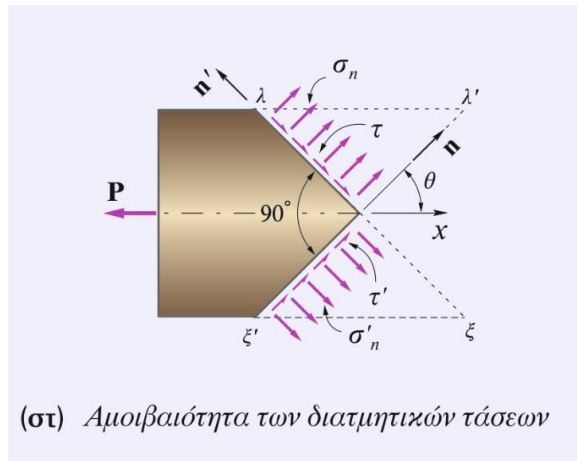
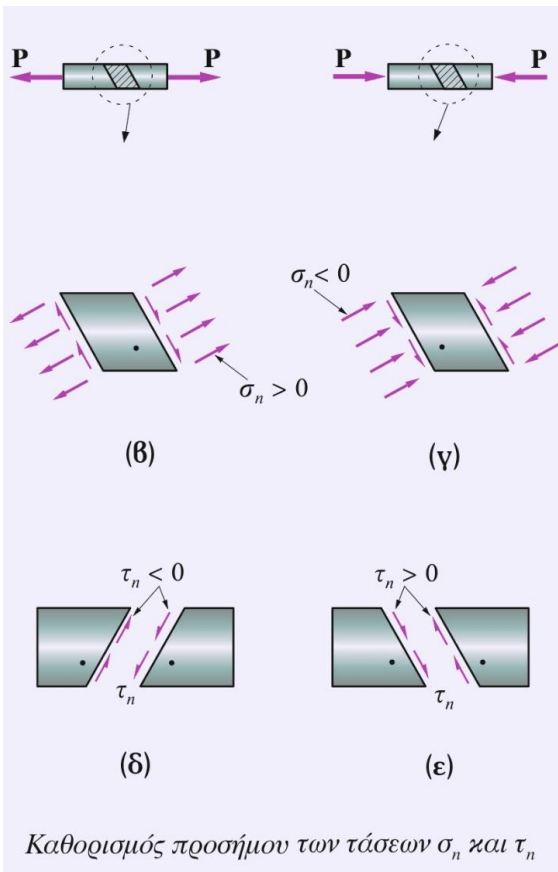
$$\sigma_n = \sigma_\theta = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) = \sigma_x \cos^2 \theta \quad ,$$

$$\tau_n = \tau_\theta = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta$$



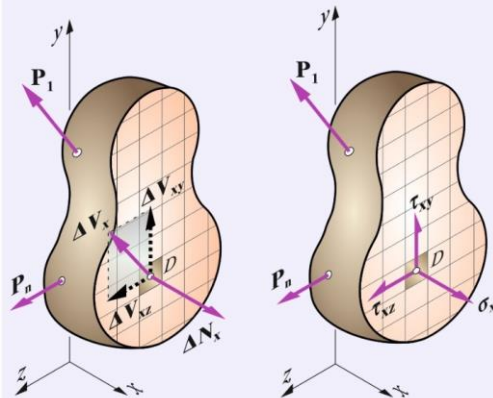
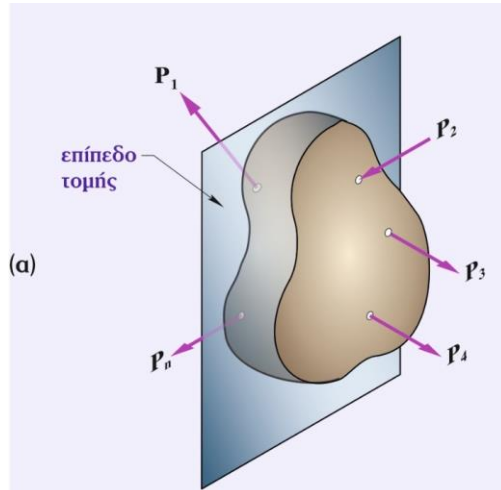
(ε) Οι τάσεις σ_θ και τ_θ συναρτήσει της θ

- Για $\theta=0^\circ$, $\sin 2\theta=0$, $\cos\theta=\cos 2\theta=1$
 $\theta = 0^\circ$, $\sigma_n = \sigma_{max}^n$, $\tau_n = 0$
- Για $\theta=45^\circ$, $\sin 2\theta=1$, $\cos 2\theta=0$
 $\theta = 45^\circ$, $\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2}$, $|\tau_{max}| = \frac{\sigma_x}{2}$
- Για $\theta=90^\circ$, $\sin 2\theta=0$, $\cos 2\theta=-1$
 $\theta = 90^\circ$, $\sigma_n = 0$, $\tau_n = 0$



Τάσεις σε πλάγιες τομές εφελκυσόμενης ράβδου

Τάσεις στη γενική ένταση



(β)

(γ)

Τομή σε φορτιζόμενο σώμα

Ορισμός τάσεων στο επίπεδο

yz:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta A} = \frac{dN_x}{dA},$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{xy}}{\Delta A} = \frac{dV_{xy}}{dA},$$

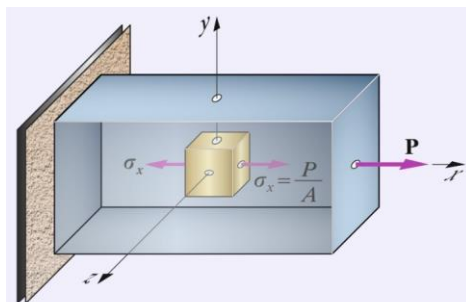
$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{xz}}{\Delta A} = \frac{dV_{xz}}{dA}$$



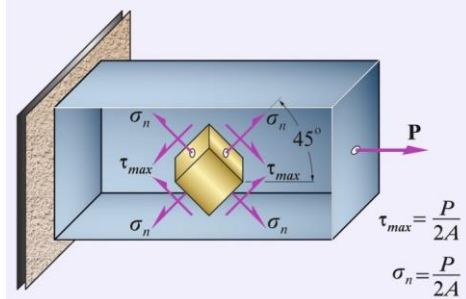
² Κατά την κατάδυση, ασκούνται στο υποβρύχιο μεταβαλλόμενες δυνάμεις

Μητρική μορφή της τάσης

- Οι συνιστώσες της τάσης σε μητρική (ή τανυστική) μορφή



(γ) Στοιχείο εντός εφελκόμενου σώματος



(δ) Περιστροφή του στοιχείου κατά 45°

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Αν $\sigma_x \neq 0$ ενώ $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ έχουμε αξονική καταπόνηση
- Αν $\tau_{xy} \neq 0$ ενώ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ έχουμε απλή διάτμηση
- Αν $\sigma_x \neq 0$ και $\sigma_y \neq 0$ ενώ $\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ έχουμε διαξονικό εφελκυσμό

Τροπές στη γενική ένταση

- Μητρική μορφή της παραμόρφωσης:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

- Διατμητική τροπή συναρτήσει των μετατοπίσεων (u, v):

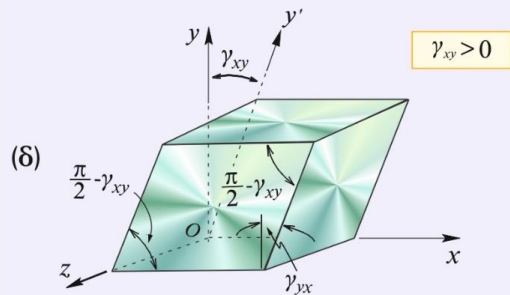
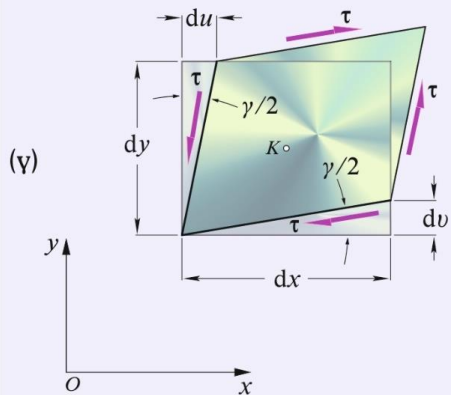
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_1 + \gamma_2 \approx \tan\gamma_1 + \tan\gamma_2 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Με το συμβολισμό δεικτών $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$



Λόγω του πνέοντος ανέμου τα πανιά του ιστιοφόρου υφίστανται γενική παραμόρφωση



Ελαστικότητα και πλαστικότητα

- Όλα τα σώματα της φύσης όταν τους επιβληθούν εξωτερικά φορτία **παραμορφώνονται**.
- Η ιδιότητα των σωμάτων να τείνουν να επανέλθουν στην αρχική τους μορφή μετά την αποφόρτιση ονομάζεται **“ελαστικότητα”**.
- **Πλαστικότητα** είναι η ιδιότητα των σωμάτων να υφίστανται **μόνιμες (ή παραμένουσες) παραμορφώσεις** όταν φορτιστούν και μετά αποφορτιστούν.

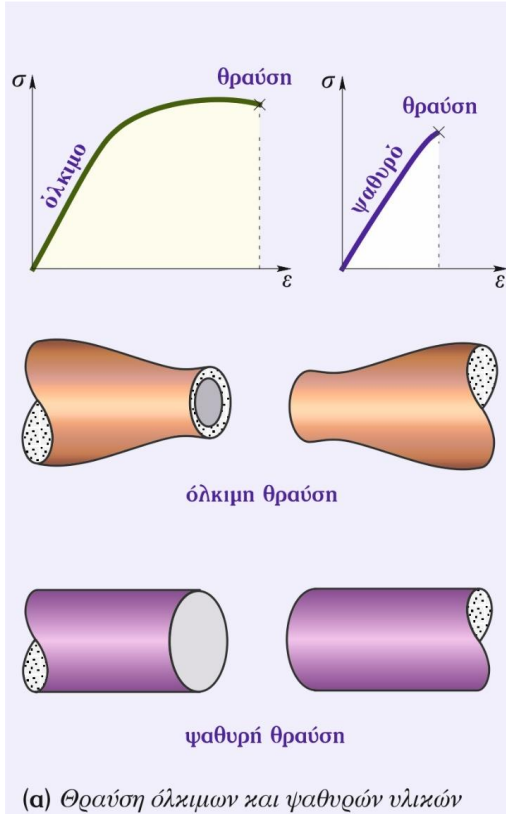
“Τελείως ελαστικό” ονομάζεται το σώμα εκείνο, το οποίο μετά την αποφόρτιση επανέρχεται ακριβώς στο αρχικό του σχήμα και διαστάσεις. Οι προκαλούμενες δε παραμορφώσεις ονομάζονται **ελαστικές**.

“Τελείως πλαστικό” χαρακτηρίζεται το σώμα, το οποίο παραμένει απολύτως στην παραμορφωμένη κατάσταση και μετά την αποφόρτιση. Στην περίπτωση αυτή το σώμα έχει υποστεί **μόνιμη ή πλαστική παραμόρφωση**.

- Ελαστική παραμόρφωση** που αναιρείται συγχρόνως με την αποφόρτιση
- Παραμένουσα (μόνιμη) ή πλαστική παραμόρφωση** που παραμένει μετά την αποφόρτιση

Όλκιμα και ψαθυρά υλικά – είδη θραύσης

Όλκιμη θραύση (ductile fracture): έντονες πλαστικές παραμορφώσεις γύρω από την περιοχή της θραύσης, επιφάνεια ανομοιομόρφη και χονδρόκοκκη.



Τα όλκιμα υλικά είναι απορροφητικά ενέργειας με γωνία 45°. Κριτήριο διαρροής

Ψαθυρή θραύση: διαρροή σε διεύθυνση της τάσης

Τα ψαθυρά υλικά παραμορφώνονται λίγο. Κριτήριο διαρροής είναι η τάση κάθετα στην επιφάνεια θραύσης



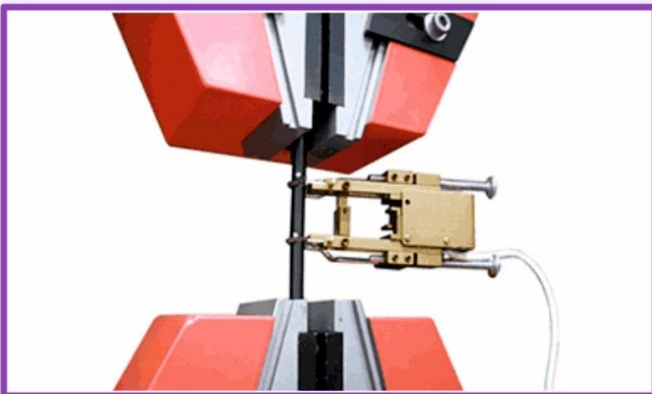
(β) Ψαθυρή και όλκιμη θραύση ίδιου υλικού

απορροχή ενέργειας. Η διαρροή γίνεται σε επίπεδο τάσης. Η διαρροή γίνεται σε διεύθυνση της τάσης.

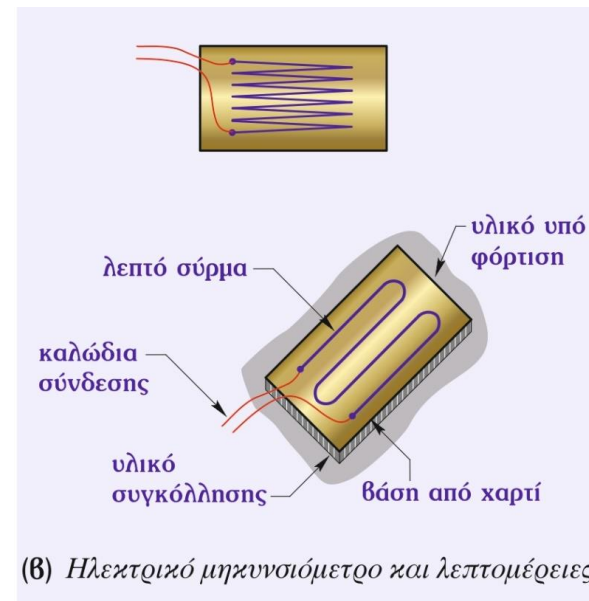
Η διαρροή γίνεται κάθετα στην διεύθυνση της τάσης και λεπτόκοκκη.

Η διαρροή γίνεται σε επίπεδο τάσης, αστοχία σε πολύ μικρές πλαστικές παραμορφώσεις.

Πείραμα εφελκυσμού

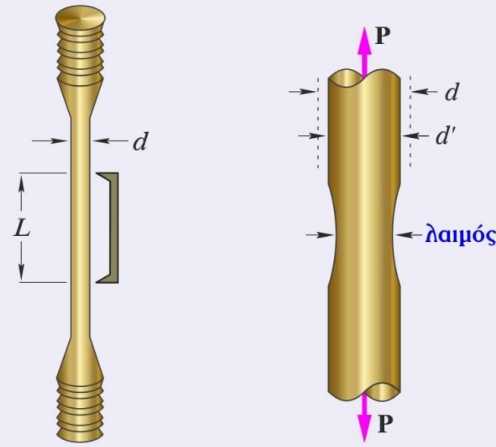


(α) Μηχανή πειράματος εφελκυσμού - θλίψης



(β) Ηλεκτρικό μηχανοσκόπιο και λεπτομέρειες

A : εμβαδόν αρχικής διατομής = $\pi d^2/4$
 A' : εμβαδόν τελικής διατομής = $\pi(d')^2/4$



Δοκίμιο εφελκυσμού
 Μεγεθυμένη περιοχή του λαιμού προ θραύσης

Συμβατικό διάγραμμα σ-ε όλκιμου υλικού

Ελαστική περιοχή: Νόμος Hooke $\sigma = E\varepsilon$, $\sigma = \tan\varphi\varepsilon$, $E = \tan\varphi$

E = μέτρο ελαστικότητας, υπολογίζεται πειραματικά ως $E = \sigma/\varepsilon$
 φυσική αντίσταση του υλικού στην παραμόρφωση

Πλαστική περιοχή:

Σημείο Y - όριο διαρροής

YH: επιμήκυνση του δοκιμίου χωρίς μεταβολή στην τάση – διαρροή (yield), το υλικό συμπεριφέρεται απόλυτα πλαστικά

HF: περιοχή σκλήρυνσης (hardening) ή κράτυνσης όπου το υλικό υπόκειται σε αλλαγές στη κρυσταλική του δομή με αποτέλεσμα την αυξημένη αντίσταση σε περαιτέρω παραμόρφωση.

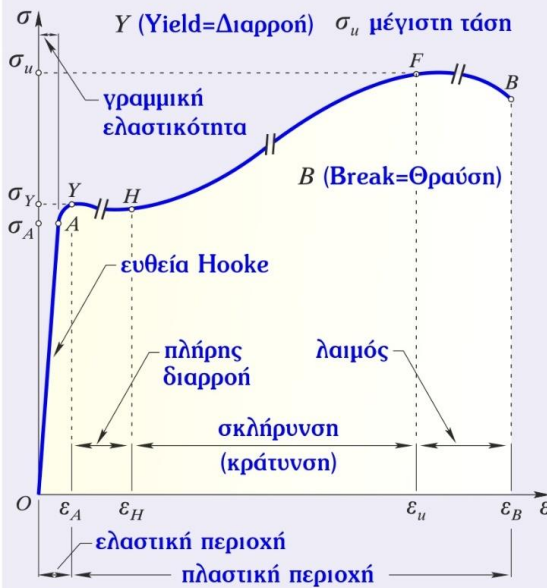
Σημείο F – τάση αστοχίας (αντοχή σε αστοχία) – failure stress or failure strength – οριακή τάση (ultimate stress) ή αντοχή σε εφελκυσμό (ultimate strength)

Περιοχή συστολής της διατομής λόγω λαιμού:

Περαιτέρω επιμήκυνση συνοδεύεται από μείωση του φορτίου ώσπου επέρχεται θραύση (break)

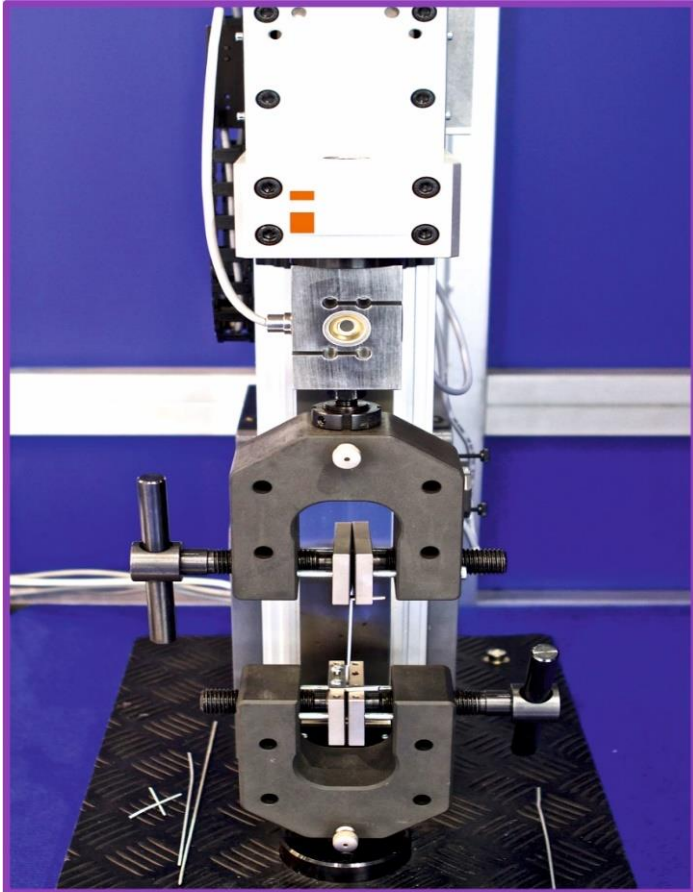
Τάση σ_B = τάση θραύσης (breaking strength)

(α)

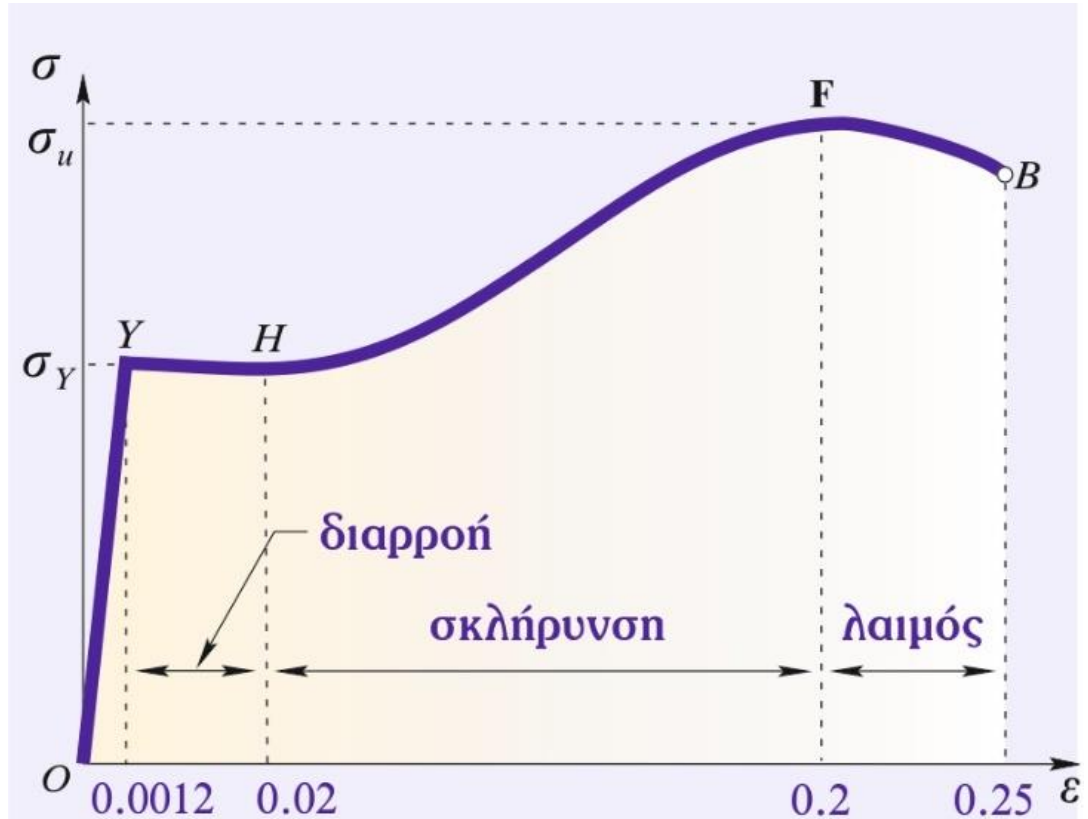


(β) Συμβατικό διάγραμμα τάσεων-τροπών

Προσεγγιστικό διάγραμμα σ - ϵ χάλυβα

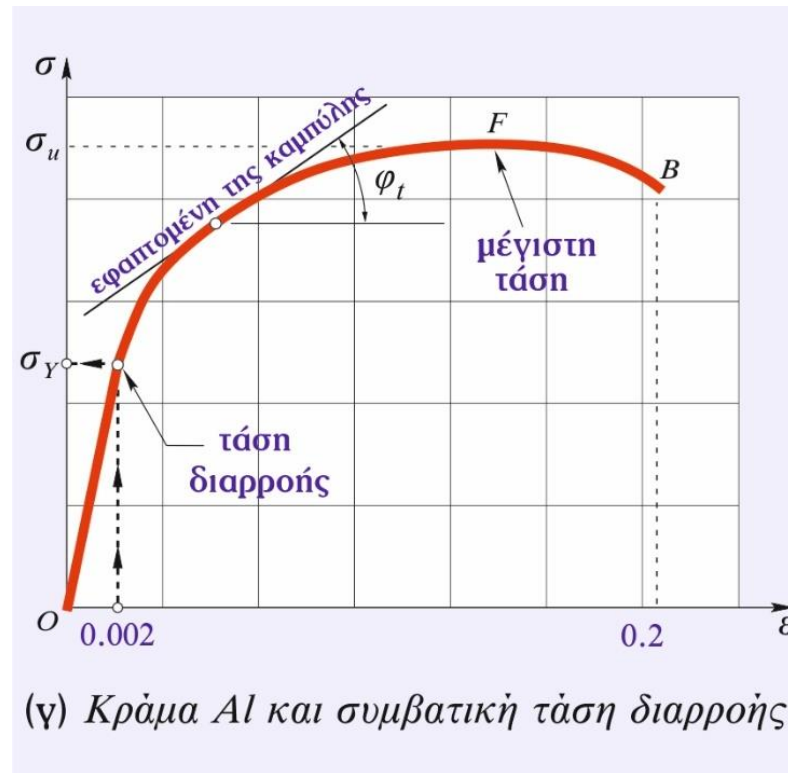


(α) Μηχανή εφελκυσμού - θλίψης με δοκίμιο



(β) Προσεγγιστικό διάγραμμα σ - ϵ χάλυβα

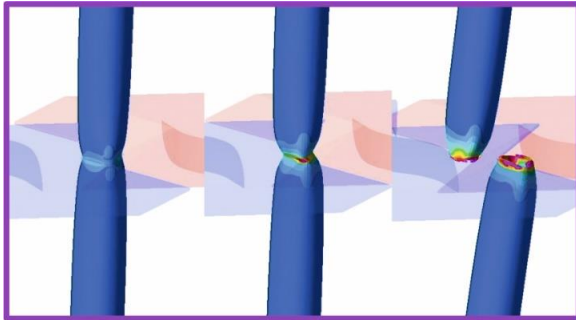
Συμβατική τάση διαρροής



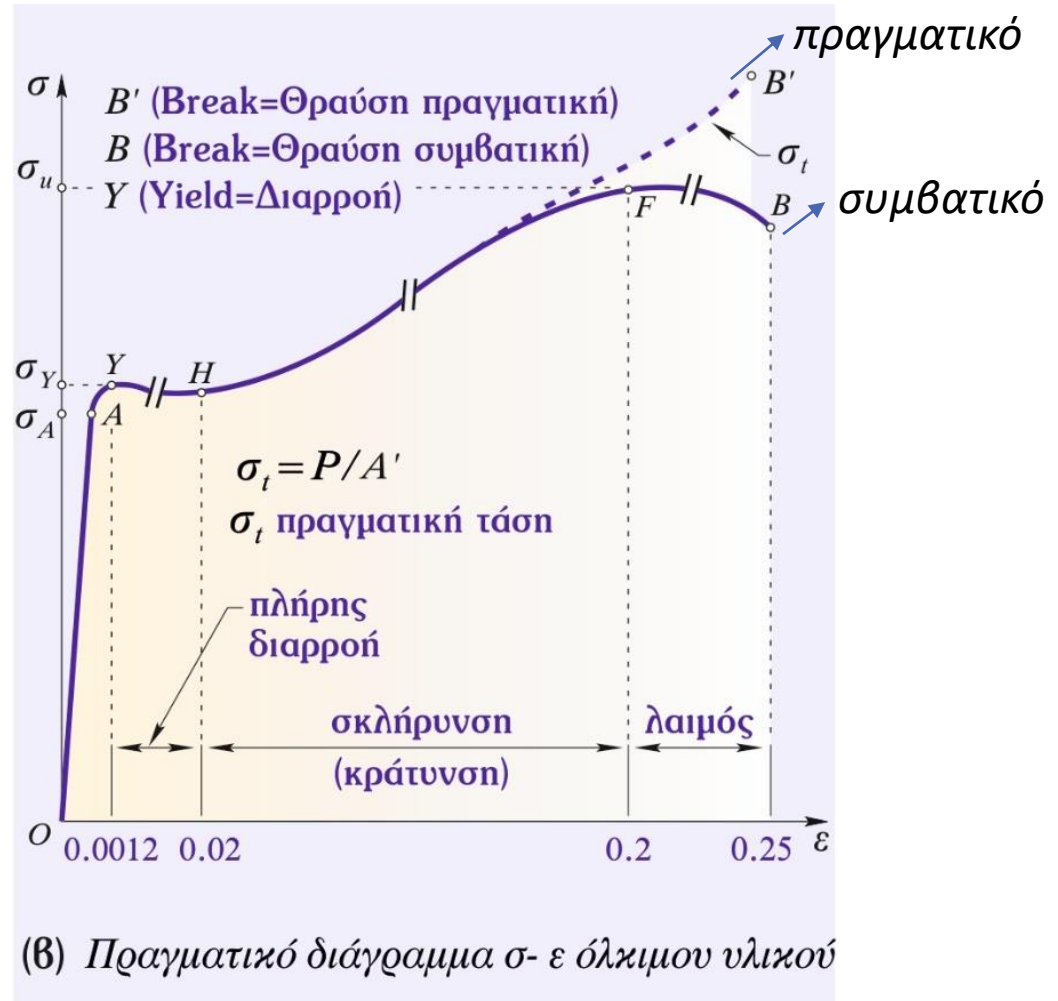
Στις περιπτώσεις που το όριο διαρροής είναι δύσκολο να ανιχνευτεί επαρκώς όπως στο Al, το ορίζουμε συμβατικά:

Συμβατική τάση διαρροής: είναι αυτή που αντιστοιχεί σε μια συμβατική δεκτή παραμένουσα (πλαστική) παραμόρφωση 0.2% , $\epsilon_{pl}^y = (OY) = 0.002$

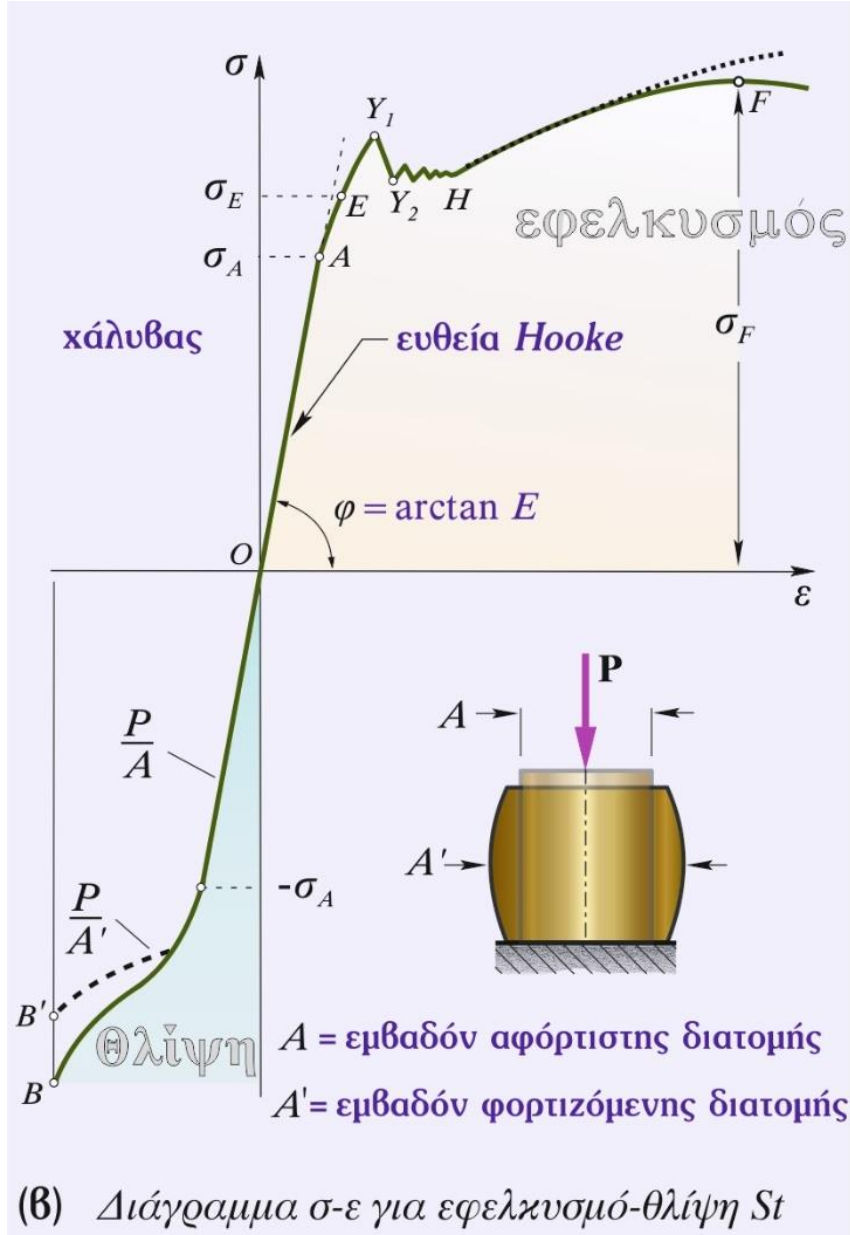
Πραγματικό διάγραμμα σ-ε όλκιμου υλικού



(α) Όλκιμη θραύση χάλυβα



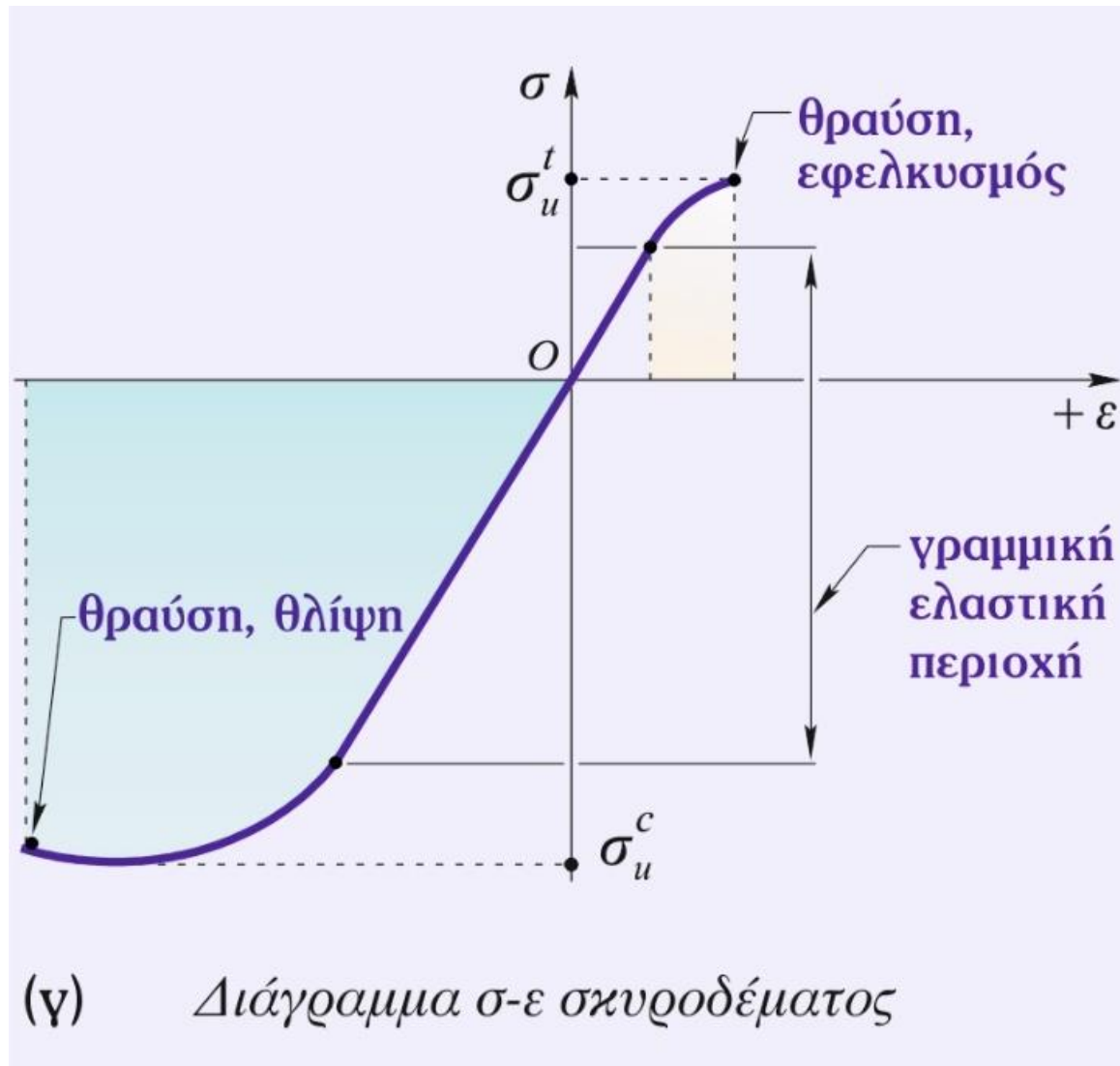
Διάγραμμα τάσης-τροπής όλκιμων υλικών σε θλίψη



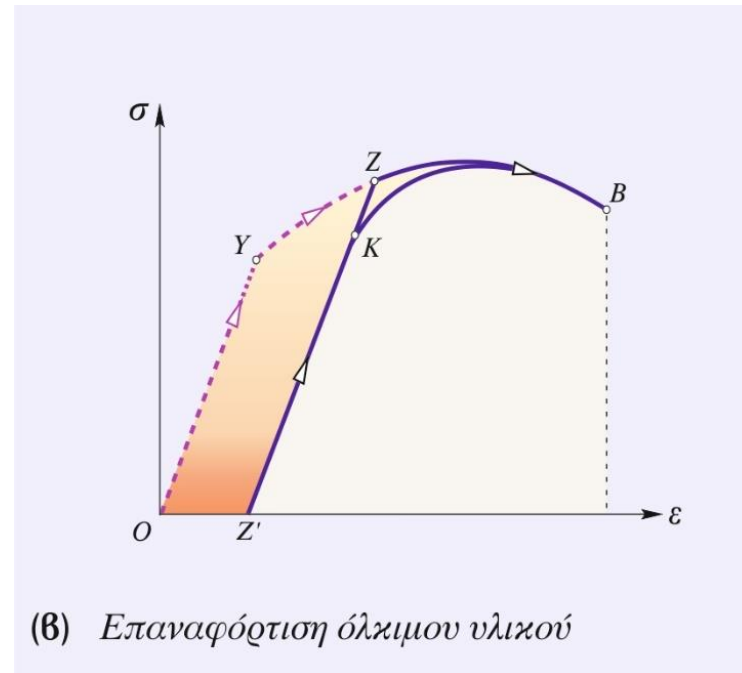
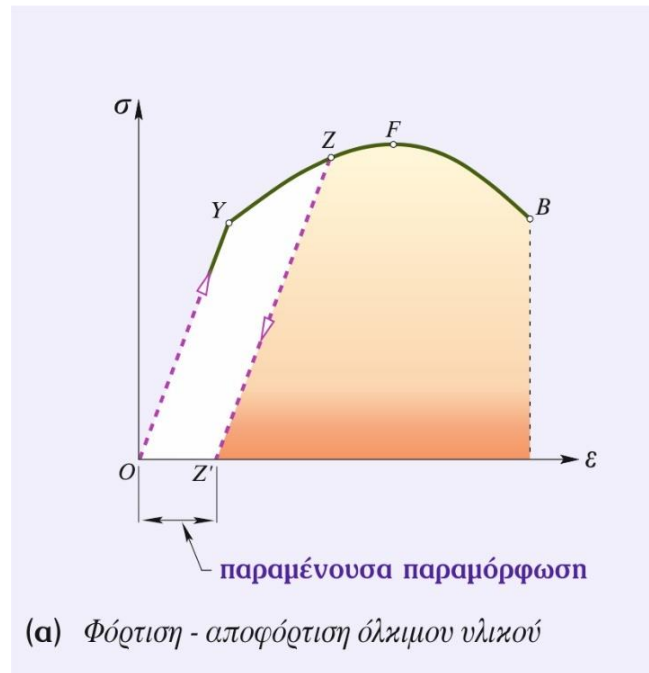
Συμβατική τάση θραύσης σε θλίψη:
 η τάση που προκαλεί μείωση του αρχικού μήκους του δοκιμίου κατά 33%
 $(\varepsilon_B = -0.33)$

(β) Διάγραμμα σ - ε για εφελκυσμό-θάλιψη St

Διάγραμμα σ-ε σκυροδέματος



Φόρτιση-αποφόρτιση και επαναφόρτιση όλκιμου υλικού

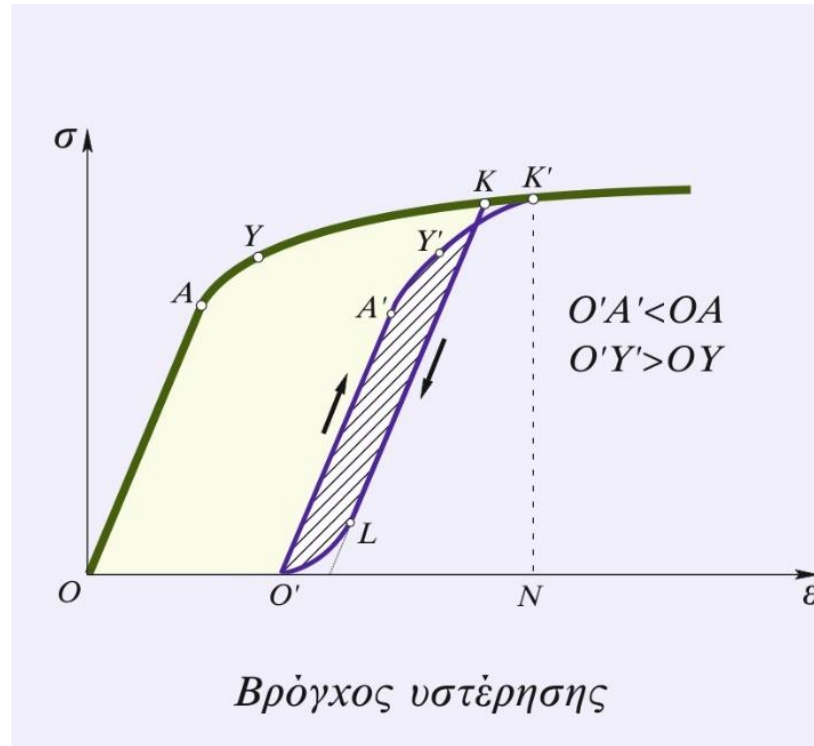


Αποφόρτιση: αν αποφορτίσουμε στο σημείο Z με τάσεις μικρότερες από την σ_u , η καμπύλη φόρτισης ακολουθεί την ίδια καμπύλη ZZ' .

Ισοδυναμία αποφόρτισης: η συμπεριφορά των υλικών είναι ελαστική, η καμπύλη αποφόρτισης είναι παράλληλη στην ευθεία Hooke, αρκεί $\sigma_Z < 2\sigma_y$.

Επαναφόρτιση: ακολουθεί την ευθεία $Z'Z$ όπου το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά, νέα τάση διαρροής μεγαλύτερη από την αρχική ($\sigma_Z > \sigma_y$).

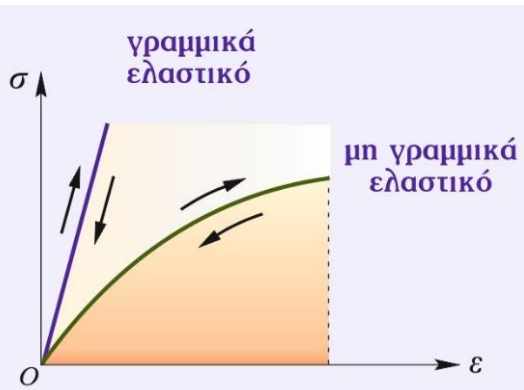
Βρόγχος υστέρησης



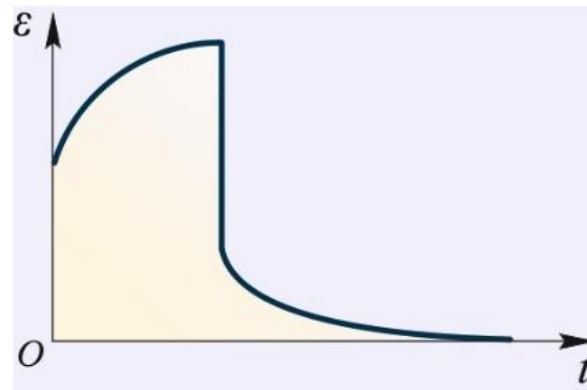
Η γραμμοσκιασμένη περιοχή που περικλείεται από τις καμπύλες αποφόρτισης (KLO') και επαναφόρτισης ($O'A'Y'K'$) ονομάζεται “βρόγχος υστέρησης”.

Το συνολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη τάσης-τροπής (παραμόρφωσης) αποτελεί ένα μέτρο ικανότητας του υλικού να απορροφήσει ενέργεια μέχρι την αστοχία και ονομάζεται δυσθραυστότητα.

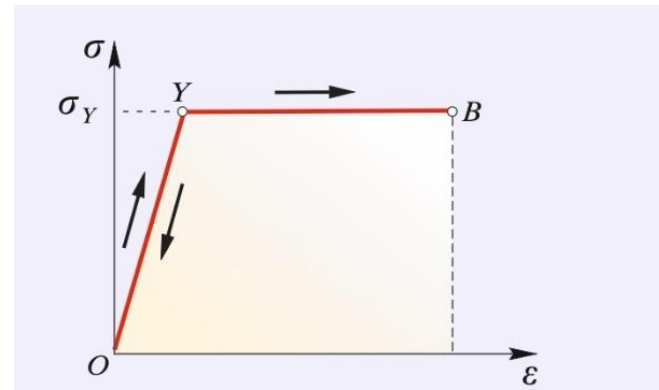
Εξιδανικευμένη συμπεριφορά των υλικών



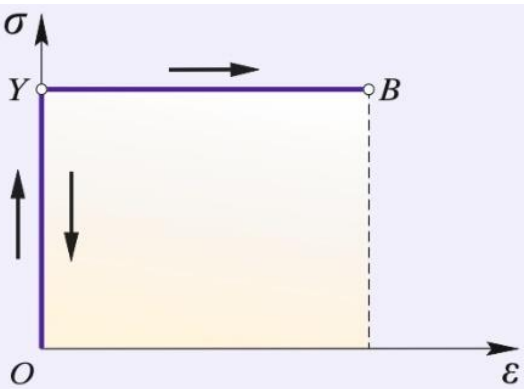
Απολύτως ελαστικό υλικό



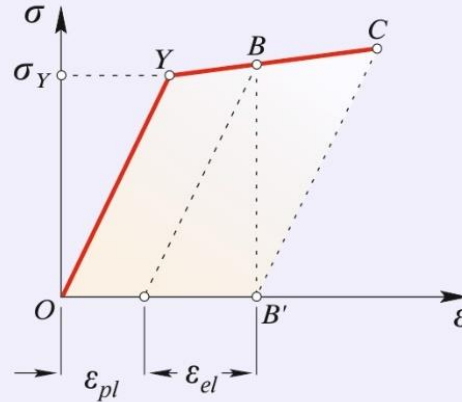
Ανελαστικό υλικό



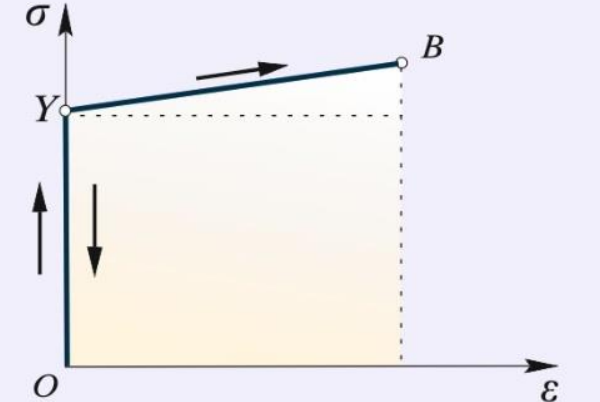
Ελαστικό απολύτως πλαστικό υλικό



Τελείως πλαστικό υλικό



Ελαστικό γραμμικά κρατυνόμενο υλικό



Γραμμικά κρατυνόμενο υλικό

Επιτρεπόμενη τάση – Συντελεστής Ασφαλείας



Τα υλικά των κατασκευών δεν πρέπει να καταπονούνται μέχρι το έσχατο όριο της αντοχής τους.

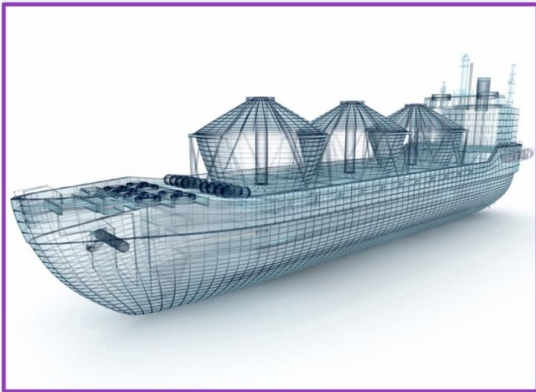
Πρέπει να υπάρχει ένα περιθώριο ασφαλείας.

Ονομάζεται $\sigma_{\varepsilon\pi}$ «επιτρεπόμενη (ή επιτρεπτή) τάση» (*allowable stress*) σ_{all} ή τάση εργασίας (*working stress*) ή και τάση σχεδίασης (*design stress*) το πηλίκο της τάσης αστοχίας προς τον συντελεστή ασφαλείας (*factor of safety F.S.*) n :

³ Υπέρομετρος συντελεστής ασφαλείας θα επεφέρε μεγάλο βάρος στο αεροπλάνο, το οποίο επιδρά αρνητικά κυρίως κατά τη φάση της απογείωσης. Φυσικά επέρχεται και αναγωγική επιβάρυνση στα καύσιμα

Για όλκιμα υλικά $\sigma_{\varepsilon\pi} = \sigma_{all} = \sigma_y$ (όριο διαρροής)

Για ψαθυρά υλικά $\sigma_{\varepsilon\pi} = \sigma_{\theta\rho} = \sigma_u = \sigma_B$ (όριο θραύσης)

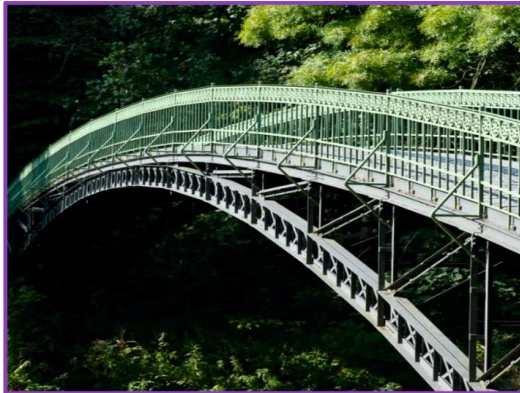


² Στην μελέτη των δομικών στοιχείων του πλοίου χρησιμοποιείται το περιθώριο ασφαλείας

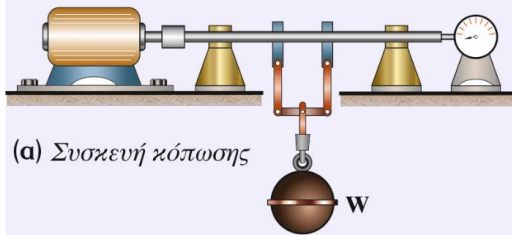
Επιτρεπόμενη τάση όλκιμων υλικών: $\sigma_{\varepsilon\pi} = \sigma_y/n_y$

Επιτρεπόμενη τάση ψαθυρών υλικών: $\sigma_{\varepsilon\pi} = \sigma_{\theta\rho}/n$

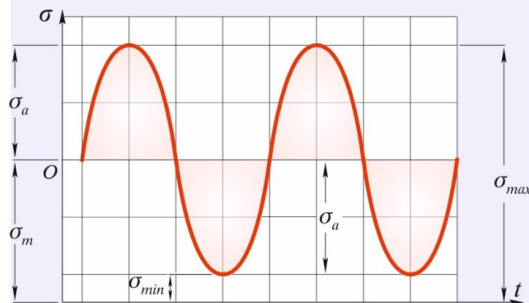
Δυναμική αντοχή των υλικών - Κόπωση



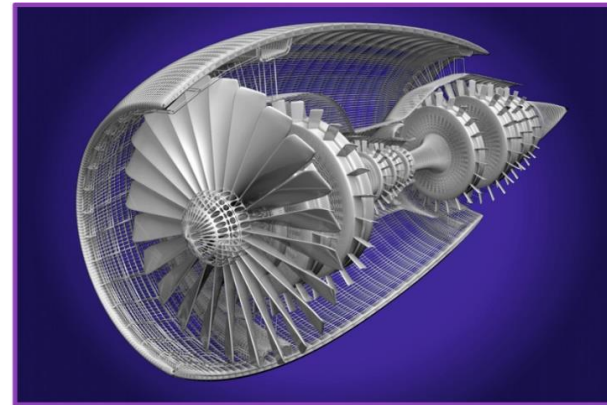
¹ Οι ράβδοι μιάς γέφυρας μέτριας κυκλοφορίας διατρέχουν μικρό κίνδυνο κόπωσης



(a) Συσκευή κόπωσης



(b) Κυμαινόμενη επαναληπτική φόρτιση
Με $\sigma_m = 0$: Αναστροφόμενη επαναληπτική



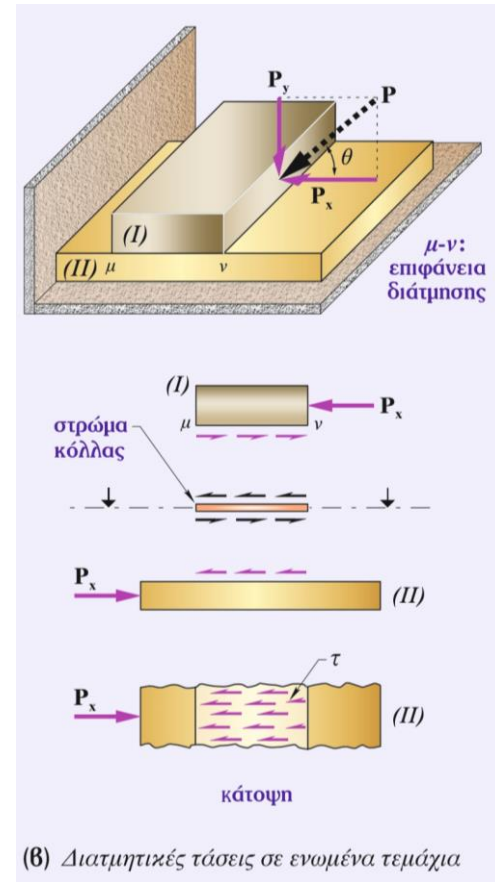
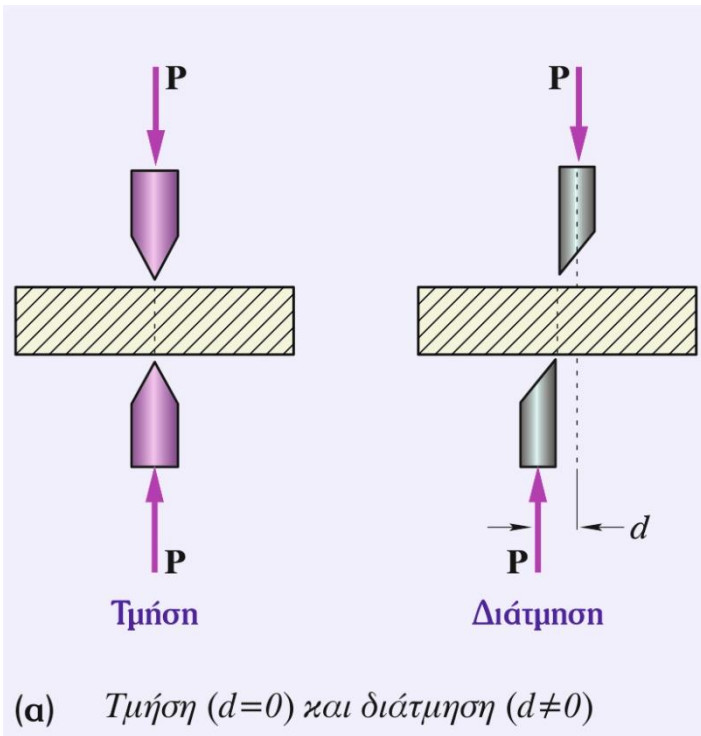
¹ Στους πολύστροφους αεριοστροβίλους πρόωσης των αεροπλάνων, ο κίνδυνος κόπωσης είναι μεγαλύτερος και λόγω υψηλής θερμοκρασίας
¹ Το αυτό ισχύει και για το στροφαλοφόρο άξονα μηχανής εσωτερικής καύσης (Μ.Ε.Κ.)

Νόμος του Hooke για τη διατμητική τάση

Οι διατμητικές τάσεις τα επενεργούν επάνω στο επίπεδο της διατομής και επιφέρουν «γωνιακές παραμορφώσεις, γ ». Μεταξύ αυτών ισχύει:

$$\tau = G\gamma, [\gamma \text{ σε rad}]$$

G το μέτρο διάτμησης ή μέτρο ολίσθησης



Διατμητική καταπόνηση πείρων-ηλών

Οι ήλοι στις μεταλλικές κατασκευές έχουν προκατασκευασμένη τη μια κεφαλή, η δε άλλη διαμορφώνεται «εν ψυχρώ» ή «εν θερμώ» μετά το πέρασμα του ήλου στις οπές των ελασμάτων.

Μονότμητος ήλος

(α)

Δίτμητος ήλος

(δ)

Αναπτυσσόμενη μέση διατμητική τάση σε ήλο, πείρο:

$$\tau = \frac{P}{\mu \cdot k \cdot A} \text{ με } \tau \leq \tau_{\text{επ}} \text{ και } \tau_{\text{επ}} \approx (0.5 \div 0.6) \sigma_{\text{επ}}$$

μ : ανθιστάμενες διατομές,
 k : αριθμός των ήλων

(β)

(γ)

Δυνάμεις σε μονότμητο ήλο

(ε)

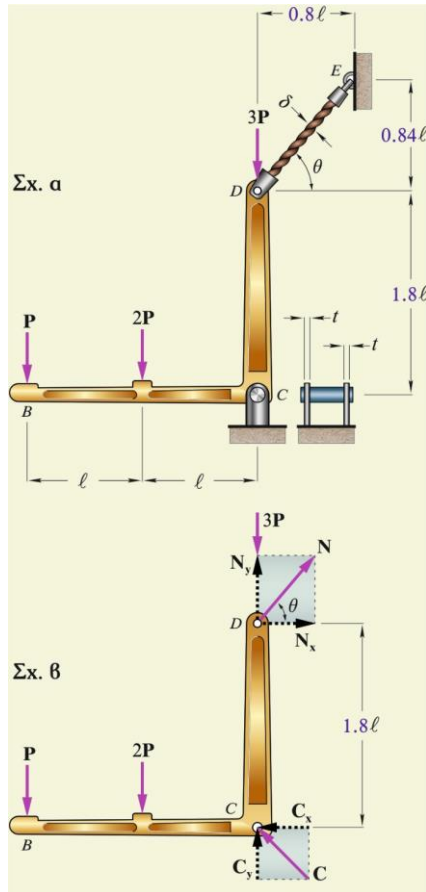
(ε)

(στ)

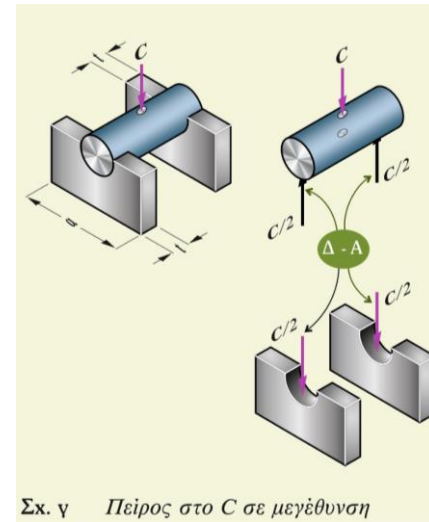
(στ)

Ένωση ελασμάτων με αρμοκαλύπτρες και δίτμητος ήλος

Παράδειγμα 8 στον Πίνακα



- «Διαστασιολόγηση πείρων συναρμολόγησης»
 Στα C, D υπάρχουν οι ίδιοι πείροι από χάλυβα.
 Αν $P = 18 \text{ kN}$, να προσδιορισθούν:
- η διάμετρος δ του χαλύβδινου συρματόσχοινου DE , αν $\sigma_u = 480 \text{ MPa}$ και συντελεστής ασφαλείας $n=3$
 - η διάμετρος d του πείρου (σε ακέραια mm), αν $\tau_u = 360 \text{ MPa}$ και συντελεστής ασφαλείας $n_s=4$
 - το πάχος έδρασης t του πείρου στις οπές, αν $|\sigma_{all}^b| = 280 \text{ MPa}$



Σx. γ Πείρος στο C σε μεγέθυνση

Κοχλίες σύνδεσης ατράκτου

Ένας τρόπος μετάδοσης της κίνησης σε μια άλλη άτρακτο είναι να καταλήγουν και οι δύο σε κυκλική (άκαμπτη) πλάκα (που λέγεται φλάτζα). Οι άκαμπτες πλάκες ενώνονται με κοχλίες k . Αν R είναι η ακτίνα περιφέρειας τοποθέτησης των k κοχλιών και V είναι η μέση δύναμη που τείνει να τμήσει τον καθένα από αυτούς, από την ισορροπία των στρεπτικών ροπών της φλάτζας έχουμε:

$$\sum M_t = 0, \quad k \cdot VR - M_t = 0 \quad \eta' \quad V = M_t/kR$$

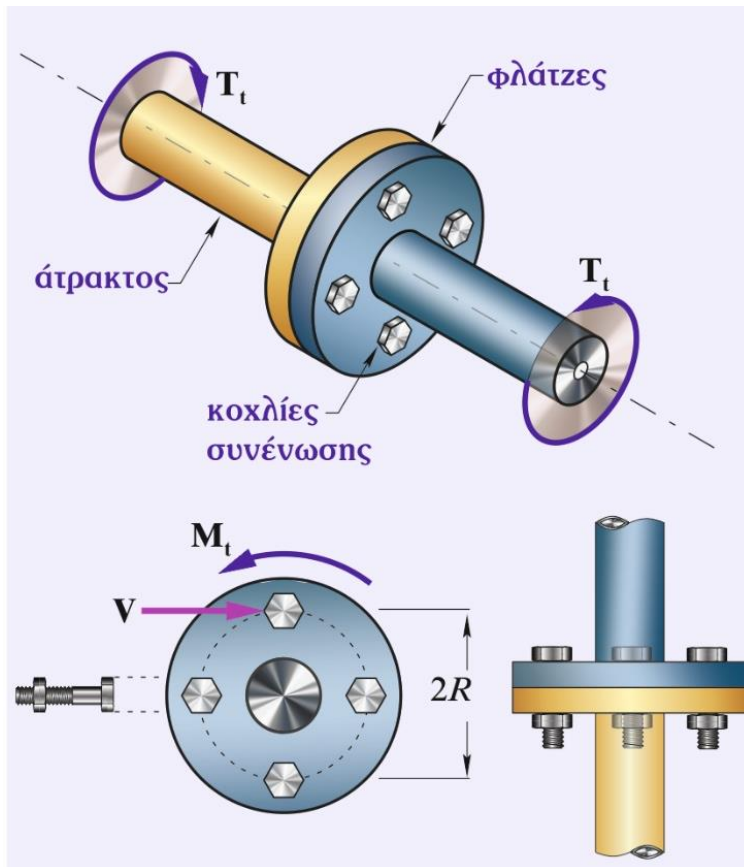
Μέση διατμητική τάση κοχλία ένωσης στρεφόμενων ατράκτων από χάλυβα:

$$\tau_{ave} = \frac{V}{A} = \frac{M_t}{kR\pi d^2/4} \leq \tau_{all}^{st}$$

k : αριθμός των ήλων

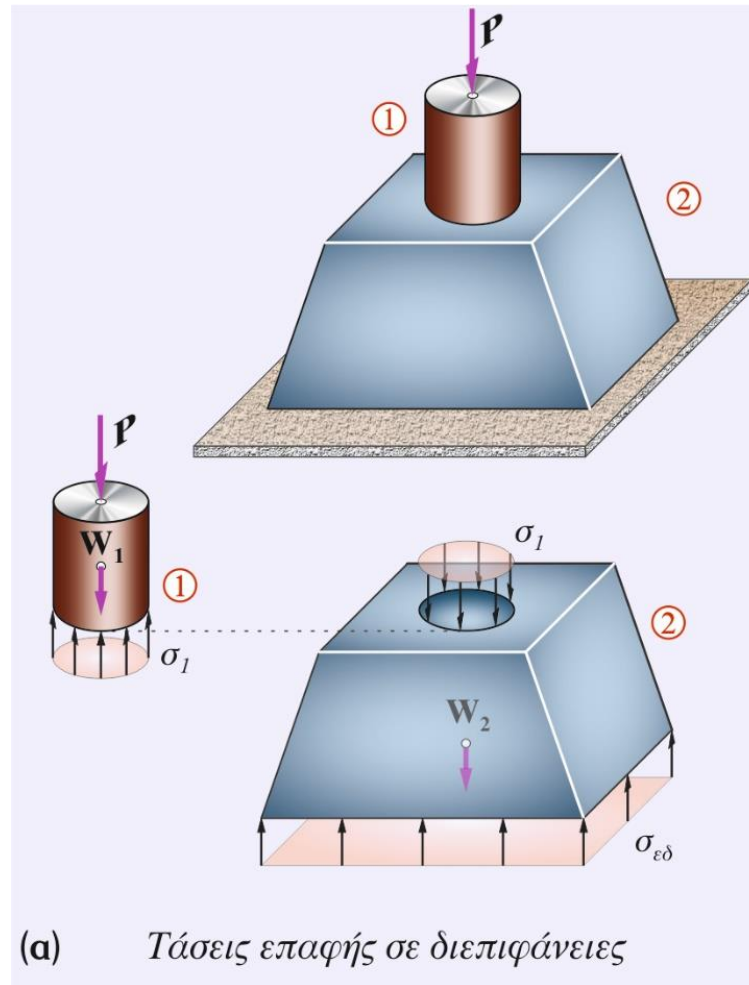
R : ακτίνα φλάτζας

d : διάμετρος κοχλία

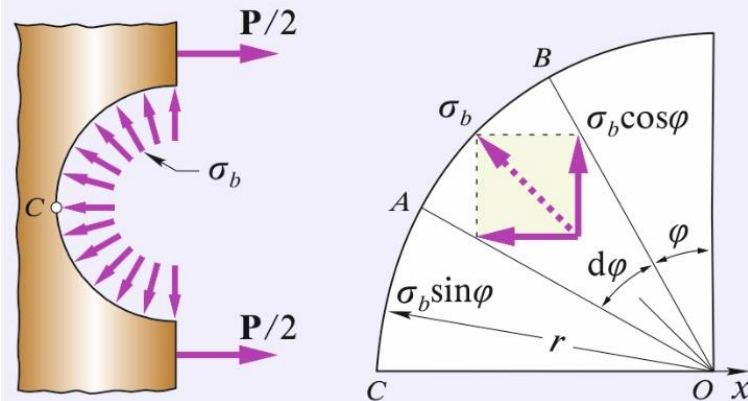
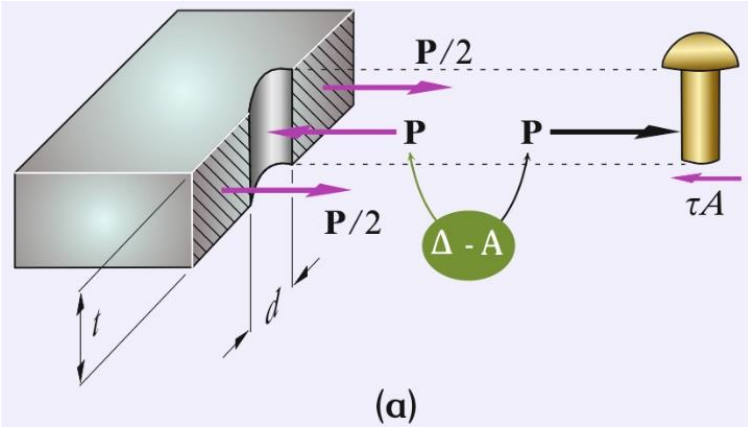


Τάση έδρασης

Στην κοινή επιφάνεια επαφής A των δύο σωμάτων αναπτύσσονται τάσεις «πίεσης επιφάνειας σ_b ή «τάσεις έδρασης» ή και «σύνθλιψης άντυγας»



Τάση έδρασης μεταξύ ελάσματος-πείρου:



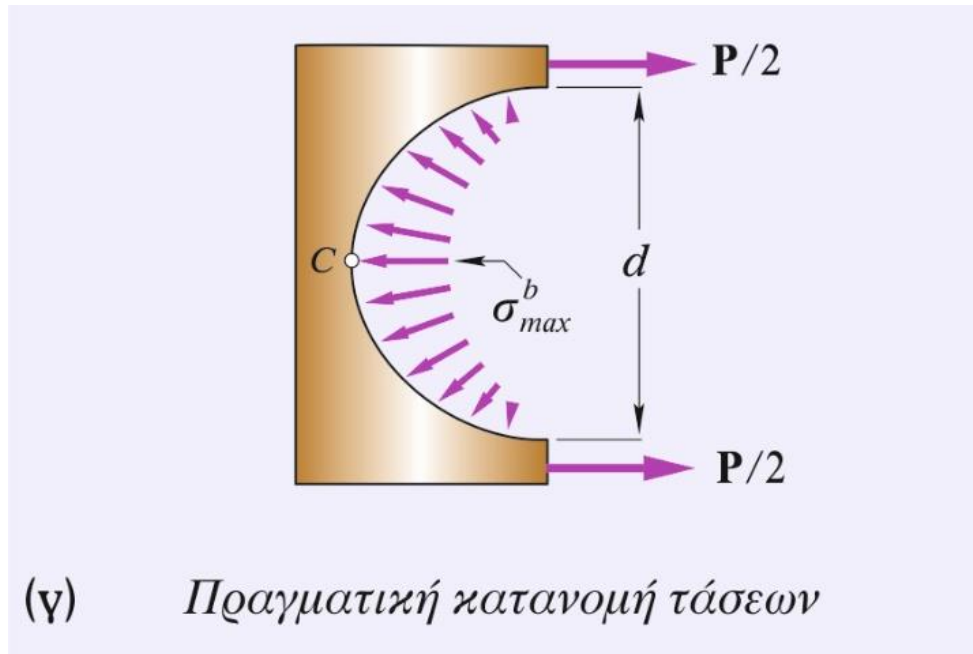
$$\sigma_b = \frac{P}{k \cdot t d}$$

k : αριθμός των ήλων

t : πάχος ελάσματος έδρασης

d : διάμετρος ήλου

Πραγματική κατανομή τάσης έδρασης μεταξύ ελάσματος-πείρου:



Η τάση σ_b λαμβάνει αρκετά μεγαλύτερες τιμές κοντά στη γενέτειρα του σημείου C:

$$\sigma_{max}^b \leq \sigma_{\epsilon\pi}^b \quad \text{ή} \quad K\sigma_b \leq \sigma_{\epsilon\pi}^b$$

K : Συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων (Τιμές: 2-3)

Το φαινόμενο είναι εντονότερο όταν η σύσφιξη μεταξύ ήλου-ελάσματος γίνεται χαλαρότερη.

Καταπονήσεις των μέσων σύνδεσης:

Ήλοι, πείροι, χαλαροί κοχλίες, υλικά συγκολλήσεων ➔ διάτμηση
Ελάσματα ➔ τάση έδρασης, εφελκυσμό ή θλίψη



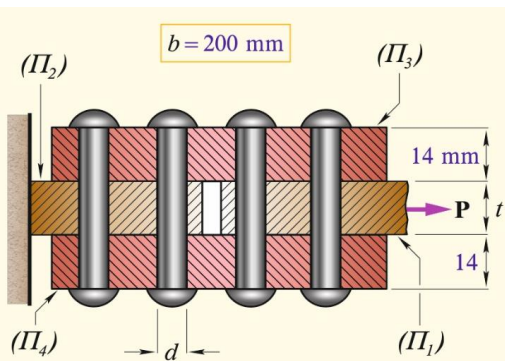
Για να είναι ασφαλής η κατασκευή θα πρέπει για τις 3 παραπάνω καταπονήσεις να ικανοποιούνται οι αντίστοιχες συνθήκες αντοχής.



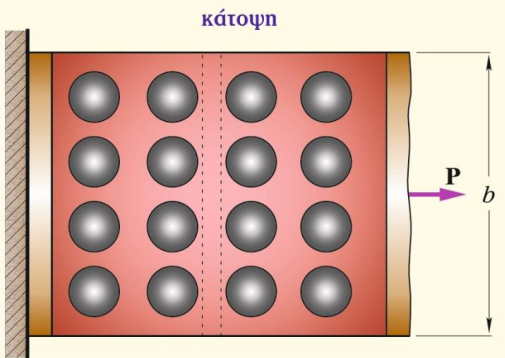
² Τα ελάσματα των καραβιών ενώνονταν με ήλους

¹ Ηλεκτροσυγκόλληση σε χαλυβδοδοκούς

Παράδειγμα 9 στον Πίνακα



Σχ. α



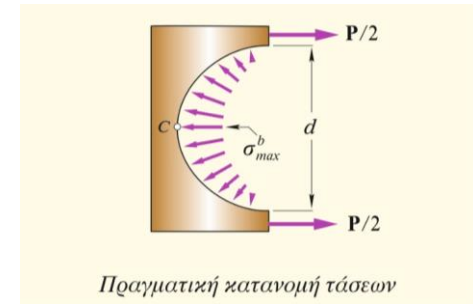
Σχ. β

Τα ελάσματα Π_1 , Π_2 , πλάτους $b = 200$ mm, συνδέονται με τη βοήθεια αρμοκάλυπτρων Π_3 και Π_4 πάχους 14 mm. Τα Π_1 , Π_2 , Π_3 και Π_4 είναι υλικού St 36 με (F.S.)=4 και συνδέονται με 4 σειρές ήλων υλικού St 48 με (F.S.)=6 που η κάθε μία έχει 4 ήλους διαμέτρου $d=10$ mm.

- Να βρεθεί η P_{max} .
 - Να προσδιορισθεί το πάχος t των ελασμάτων Π_1 , Π_2
 - Να πραγματοποιηθεί έλεγχος της αντοχής του ελασματος σε εφελκυσμό
- Η επιτρεπόμενη τάση έδρασης (επιφανείας) να ληφθεί στο 90% της αντίστοιχης σε εφελκυσμό.

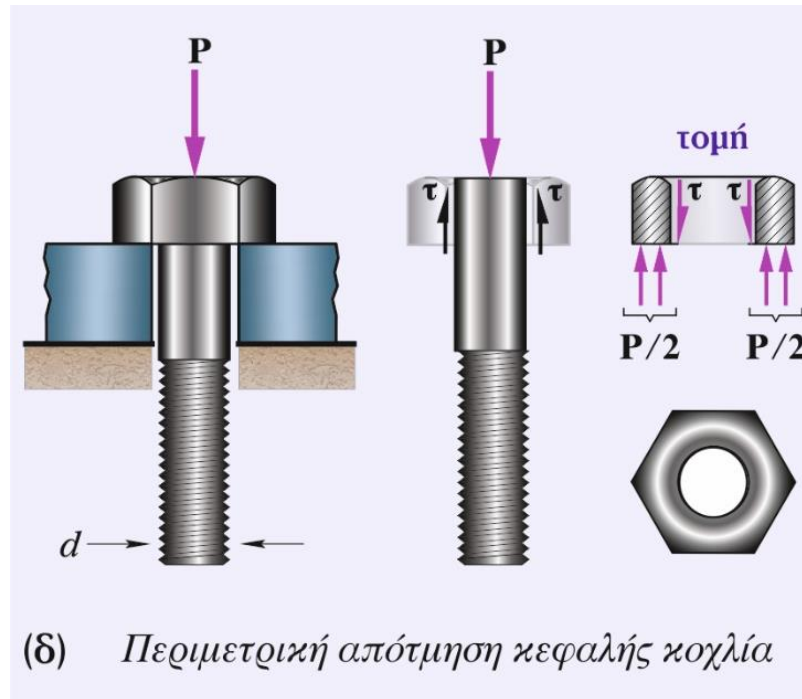
Να ληφθεί υπόψιν η πραγματική κατανομή των τάσεων έδρασης.

Η σύσφιξη μεταξύ ήλου και ελασματος είναι αρκετά χαλαρή με συνολικό κενό 1 mm.



Πραγματική κατανομή τάσεων

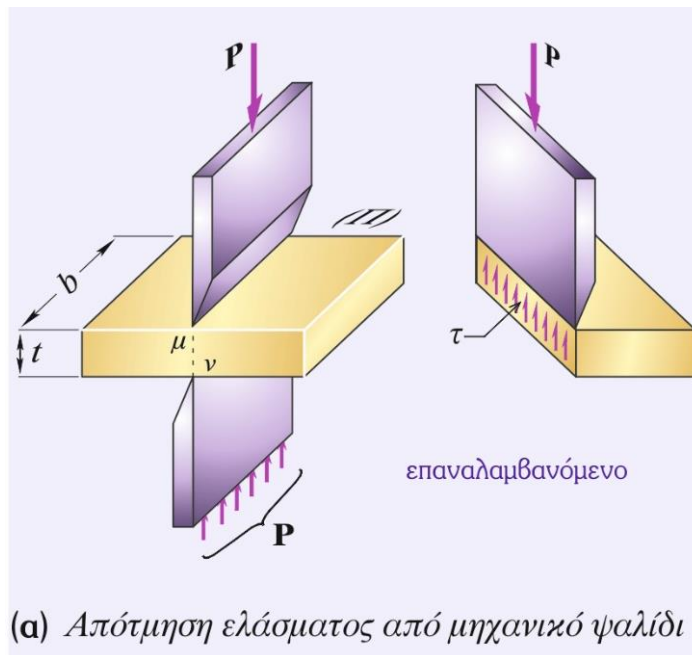
Περιμετρική απότμηση σταθερής κεφαλής κοχλίας:



$$\tau = \frac{P}{\pi d \cdot t}$$

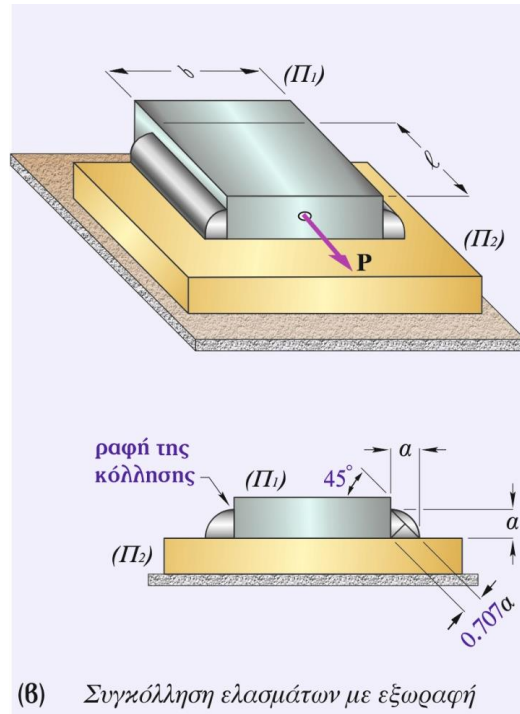
t: πάχος της κεφαλής

Άμεση διάτμηση – Απότμηση ή ψαλιδισμός



Μέση διατμητική τάση απότμησης: $\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{bt}$

Άμεση διάτμηση – Συγκολλήσεις



Ένας συνηθισμένος τρόπος συγκόλλησης των μεταλλικών ελασμάτων είναι η ηλεκτροσυγκόλληση. Η περιοχή της ηλεκτροσυγκόλλησης ονομάζεται «ραφή» και είναι από το ίδιο υλικό με τα ελάσματα. Η ραφή είναι σχήματος περίπου ορθογωνίου τριγώνου πλευράς a . Δηλαδή το πάχος της είναι $0.707a$.

$$\tau \leq \tau_{επ}: \frac{P}{0.707aL} \leq \tau_{επ}$$

a : πάχος συγκόλλησης

L : μήκος συγκόλλησης = $2l$