Κεφάλαιο 11

Συναρτήσεις παραγωγής

1

Συναρτήσεις παραγωγής

- **Η συνάρτηση παραγωγής** μιας επιχείρησης για ένα προϊόν (q) δείχνει τη μέγιστη ποσότητα του αγαθού που μπορεί να παραχθεί με εναλλακτικούς συνδυασμούς κεφαλαίου (k) και εργασίας (l)

$$q = f(k,l)$$

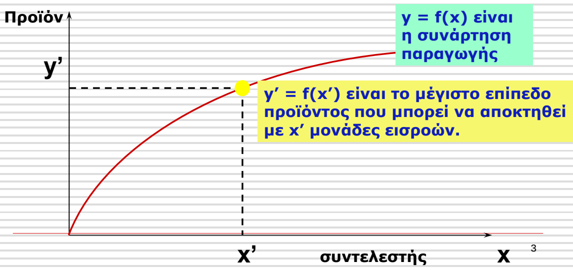
Ή με περισσότερους συντελεστές παραγωγής (x_1, x_2,..x_n)

$$q = f(x_1, \cdots, x_n)$$

2

Συναρτήσεις παραγωγής

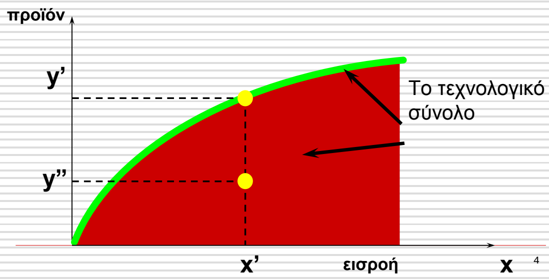
- Ένα προϊόν, ένας συντελεστής παραγωγής



3

Συναρτήσεις παραγωγής τεχνολογικά σύνολα

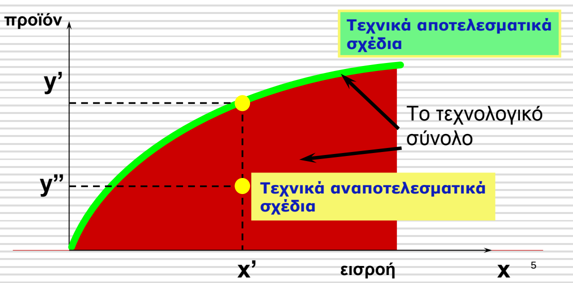
- Ένα προϊόν, ένας συντελεστής παραγωγής



4

Συναρτήσεις παραγωγής τεχνολογικά σύνολα

- Ένα προϊόν, ένας συντελεστής παραγωγής



5

Συναρτήσεις με δύο συντελεστές

- Έστω ότι έχουμε

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3}.$$

- Με (x_1, x_2) = (1, 8), έχουμε

$$y = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 2 \times 1^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 1 \times 2 = 4.$$

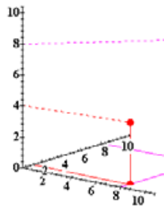
- Με (x_1, x_2) = (8, 8), έχουμε

$$y = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 2 \times 8^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

6

Συναρτήσεις με δύο συντελεστές

- Διαγραμματικά



Οριακό φυσικό προϊόν

- Για να μελετήσουμε τη μεταβολή ενός συντελεστή, ορίζουμε **ως οριακό φυσικό προϊόν** το επιπλέον προϊόν που μπορεί να παραχθεί από την απασχόληση μιας επιπλέον μονάδας του συντελεστή, ενώ διατηρούμε τους άλλους συντελεστές σταθερούς

$$\text{οριακό φυσικό προϊόν του κεφαλαίου} = MP_k = \frac{\partial q}{\partial k} = f_k$$

$$\text{οριακό φυσικό προϊόν της εργασίας} = MP_l = \frac{\partial q}{\partial l} = f_l$$

Οριακό φυσικό προϊόν

- Με n συντελεστές έχουμε τη συνάρτηση

$$y=f(x_1,\cdots;x_n)$$

- Το οριακό προϊόν του συντελεστή *i* είναι

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα

- Το οριακό φυσικό προϊόν ενός συντελεστή εξαρτάται από την ποσότητα του συντελεστή χρησιμοποιείται. Γενικά, υποθέτουμε φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα

$$\frac{\partial MP_k}{\partial k} = \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = f_{kk} = f_{11} < 0 \qquad \frac{\partial MP_l}{\partial l} = \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = f_{ll} = f_{22} < 0$$

Φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα

- Λόγω της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας, ο οικονομολόγος του 19ου αιώνα Thomas Malthus ανησυχούσε για την επίπτωση που θα είχε ο αυξανόμενος πληθυσμός στην παραγωγικότητα της εργασίας
- Όμως, οι μεταβολές στην οριακή παραγωγικότητα της εργασίας διαχρονικά εξαρτάται και από τις μεταβολές άλλων συντελεστών, όπως π.χ. Το κεφάλαιο
  - Γι' αυτό πρέπει να εξετάζουμε το f_{lk} το οποίο είναι συνήθως θετικό.

Μέσο φυσικό προϊόν

- Η παραγωγικότητα της εργασίας μετράται συνήθως με τη μέση παραγωγικότητα

$$AP_l = \frac{\text{προϊόν}}{\text{εργασία}} = \frac{q}{l} = \frac{f(k,l)}{l}$$

- Το AP_l εξαρτάται από την απασχολούμενη ποσότητα κεφαλαίου

Συνάρτηση παραγωγής με δύο συντελεστές

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = f(k,l) = 600k^2l^2 - k^3l^3$$

- Για να βρούμε το MP_l και το AP_l, πρέπει να υποθέσουμε μια τιμή για το
  - Έστω ότι $k = 10$
- Η συνάρτηση παραγωγής γίνεται

$$q = 60{,}000l^2 - 1000l^3$$

13

Συνάρτηση παραγωγής με δύο συντελεστές

- Η οριακή παραγωγικότητα είναι

$$MP_l = \partial q/\partial l = 120{,}000l - 3000l^2$$

η οποία φθίνει καθώς το l αυξάνει

- Αυτό συνεπάγεται ότι το q έχει μια μέγιστη τιμή:

$$120{,}000l - 3000l^2 = 0$$

$$40l = l^2$$

$$l = 40$$

- Η εισροή εργασίας πάνω από $l = 40$ μειώνει το προϊόν

14

Συνάρτηση παραγωγής με δύο συντελεστές

- Για να βρούμε τη μέση παραγωγικότητα, κρατούμε το k=10 και επιλύοντας βρίσκουμε

$$AP_l = q/l = 60{,}000l - 1000l^2$$

- Το AP_l είναι μέγιστο όταν

$$\partial AP_l/\partial l = 60{,}000 - 2000l = 0$$

$$l = 30$$

15

Συνάρτηση παραγωγής με δύο συντελεστές

- Πράγματι, όταν $l = 30$, τότε το AP_l και το MP_l είναι ίσα με 900,000

- Άρα, όταν το AP_l είναι στο μέγιστο του, τότε τα AP_l και MP_l είναι ίσα

16

Χάρτης με καμπύλες ίσου προϊόντος

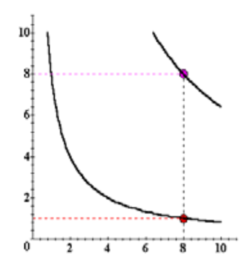
- Για να απεικονίσουμε τη δυνατότητα υποκατάστασης ενός συντελεστή με έναν άλλο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το χάρτη με καμπύλες ίσου προϊόντος.
- Μια **καμπύλη ίσου προϊόντος** δείχνει εκείνους του συνδυασμούς των k και l που μπορούν να παράγουν ένα συγκεκριμένο επίπεδο προϊόντος (q_0)

$$f(k,l) = q_0$$

17

Καμπύλες ίσου προϊόντος με δύο συντελεστές

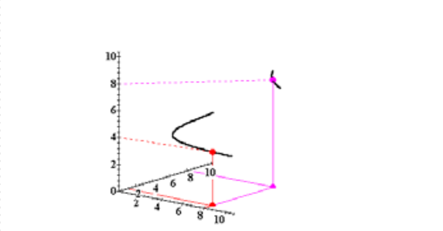
- Διαγραμματικά



18

Καμπύλες ίσου προϊόντος με δύο συντελεστές

- Απεικόνιση προϊόντος με δύο συντελεστές



Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (*RTS*)

- Ο **Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης** (*RTS*) δείχνει το λόγο στον οποίο η εργασία μπορεί να υποκαταστήσει το κεφάλαιο, ενώ διατηρούμε το προϊόν σταθερό κατά μήκος μιας *καμπύλης ίσου προϊόντος*

$$RTS\,(l \text{ for } k) = \left.\frac{-dk}{dl}\right|_{q=q_0}$$

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (*RTS*)

- Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$y = f(x_1, x_2).$$

Μια μικρή μεταβολή (dx_1, dx_2) προκαλεί μια μεταβολή στο προϊόν ίση με

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2.$$

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (*RTS*)

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2.$$

Κατά μήκος μιας καμπύλης ίσου προϊόντος dy = 0, και άρα

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2.$$

ή

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 = -\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1$$

ή

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2}.$$

(*RTS*), Παράδειγμα με συνάρτηση Cobb-Douglas

- Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$

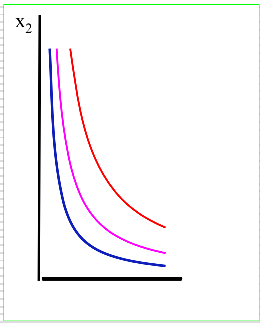
Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} x_2^b \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = b x_1^a x_2^{b-1}.$$

Ο τεχνικός λόγος υποκατάστασης είναι

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = -\frac{a x_1^{a-1} x_2^b}{b x_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{a x_2}{b x_1}.$$

(*RTS*), Παράδειγμα με συνάρτηση Cobb-Douglas

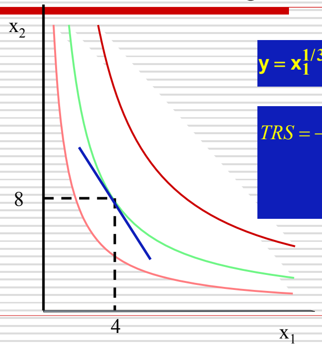


x_1

$$y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}; \quad a = \frac{1}{3} \text{ and } b = \frac{2}{3}$$

$$TRS = -\frac{a x_2}{b x_1} = -\frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = -\frac{x_2}{2x_1}$$

(RTS), Παράδειγμα με συνάρτηση Cobb-Douglas



$$y = x_1^{1/3}x_2^{2/3};\quad a = \frac{1}{3} \text{ and } b = \frac{2}{3}$$

$$TRS = -\frac{ax_2}{bx_1} = -\frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = -\frac{x_2}{2x_1} = -\frac{8}{2x4} = -1$$

RTS και οριακή παραγωγικότητα

- Ας πάρουμε το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης παραγωγής:

$$dq = \frac{\partial f}{\partial l}\cdot dl + \frac{\partial f}{\partial k}\cdot dk = MP_l \cdot dl + MP_k \cdot dk$$

- Κατά μήκος μιας καμπύλης ίσου προϊόντος $dq = 0$, άρα

$$MP_l \cdot dl = -MP_k \cdot dk$$

$$RTS\ (l\ \gamma\iota\alpha\ k) = \left.\frac{-dk}{dl}\right|_{q=q_0} = \frac{MP_l}{MP_k}$$

RTS και οριακή παραγωγικότητα

- Επειδή MP_l και MP_k είναι και τα δύο μη αρνητικά, ο RTS είναι θετικός (ή μηδέν)
- Γενικά όμως, δεν είναι δυνατό να συναγάγουμε φθίνοντα RTS μόνο από την υπόθεση της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας

RTS και οριακή παραγωγικότητα

- Για να δείξουμε ότι οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι κυρτές, θα πρέπει να δείξουμε ότι $d(RTS)/dl < 0$
- Αφού $RTS = f_l/f_k$

$$\frac{dRTS}{dl} = \frac{d(f_l/f_k)}{dl}$$

$$\frac{dRTS}{dl} = \frac{[f_k(f_{ll} + f_{lk}\cdot dk/dl) - f_l(f_{kl} + f_{kk}\cdot dk/dl)]}{(f_k)^2}$$

RTS και οριακή παραγωγικότητα

- Με δεδομένο ότι $dk/dl = -f_l/f_k$ κατά μήκος μιας καμπύλης ίσου προϊόντος και το θεώρημα του Young ($f_{kl} = f_{lk}$)

$$\frac{dRTS}{dl} = \frac{(f_k^2 f_{ll} - 2f_k f_l f_{kl} + f_l^2 f_{kk})}{(f_k)^3}$$

- Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $f_k > 0$, ο παρονομαστής είναι θετικός
- Επειδή υποθέτουμε ότι τα f_{ll} και f_{kk} είναι αρνητικά, ο λόγος θα είναι αρνητικός αν το f_{kl} είναι θετικό.

RTS και οριακή παραγωγικότητα

- Διαισθητικά, είναι λογικό να υποθέτουμε ότι τα $f_{kl} = f_{lk}$ πρέπει να είναι θετικά
  - Αν οι εργάτες έχουν περισσότερο κεφάλαιο θα είναι πιο παραγωγικοί
- Ορισμένες όμως συναρτήσεις παραγωγής έχουν το $f_{kl} < 0$ για κάποιο διάστημα
  - Όταν υποθέτουμε φθίνοντα RTS, θεωρούμε ότι τα MP_l και MP_k φθίνουν αρκετά γρήγορα για να αντισταθμίσουν κάθε δυνατή αρνητική σταυροειδή επίδραση της παραγωγικότητας

Φθίνων *RTS*

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = f(k,l) = 600k^2l^2 - k^3l^3$$

- Γι’ αυτή τη συνάρτηση παραγωγής

$$MP_l = f_l = 1200k^2l - 3k^3l^2$$

$$MP_k = f_k = 1200kl^2 - 3k^2l^3$$

  - Οι οριακές αυτές παραγωγικότητες θα είναι θετικές για τιμές των k και l για τις οποίες ισχύει ότι $kl < 400$

Φθίνων *RTS*

- Επειδή

$$f_{ll} = 1200k^2 - 6k^3l$$

$$f_{kk} = 1200l^2 - 6kl^3$$

αυτή η συνάρτηση παραγωγής έχει φθίνουσες οριακές παραγωγικότητες των συντελεστών για επαρκώς μεγάλες τιμές των k και l

  - f_{ll} και $f_{kk} < 0$ αν $kl > 200$

Φθίνων RTS

- Σταυροειδής διαφόριση είτε της μιας είτε της άλλης συνάρτησης οριακής παραγωγικότητας μας δίνει ότι

$$f_{kl} = f_{lk} = 2400kl - 9k^2l^2$$

που είναι θετική μόνο για $kl < 266$

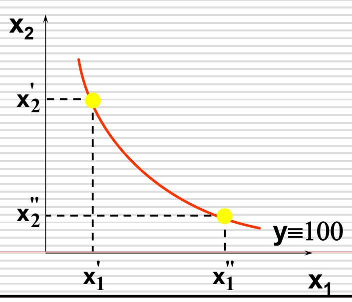
Φθίνων RTS

- Έτσι, γι’ αυτή τη συνάρτηση παραγωγής ο *RTS* είναι φθίνων για όλο το εύρος των k και l που οι οριακές παραγωγικότητες είναι θετικές
  - Για μεγαλύτερες τιμές των k και l, οι φθίνουσες οριακές παραγωγικότητες είναι επαρκείς για να ξεπεράσουν την επίδραση μιας αρνητικής τιμής του f_{kl} ώστε να διασφαλιστεί η κυρτότητα των καμπυλών ίσης ποσότητας

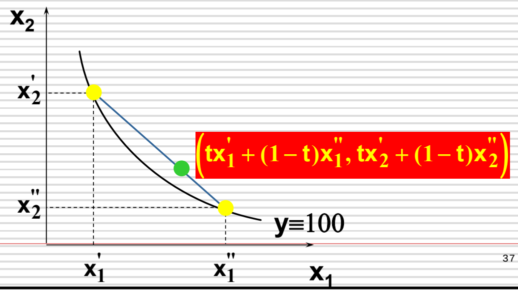
Κυρτότητα καμπύλης ίσου προϊόντος

- Κυρτότητα: Αν όλοι οι συνδυασμοί εισροών x’ και x” δίνουν y μονάδες προϊόντος, τότε το μείγμα tx’ + (1-t)x” δίνει τουλάχιστο y μονάδες προϊόντος, για κάθε 0 < t < 1.

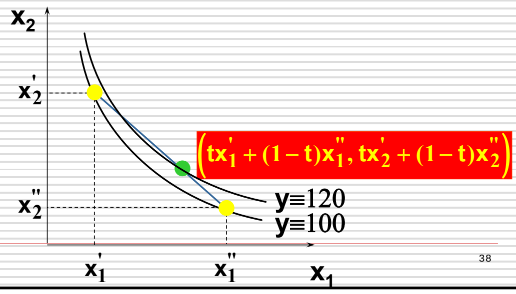
Κυρτότητα καμπύλης ίσου προϊόντος



Κυρτότητα καμπύλης ίσου προϊόντος



Κυρτότητα καμπύλης ίσου προϊόντος



Κυρτότητα καμπύλης ίσου προϊόντος

Η κυρτότητα συνεπάγεται ότι ο TRS αυξάνει (γίνεται λιγότερο αρνητικός) καθώς το x_1 αυξάνει.

Αποδόσεις κλίμακας

- Πώς αντιδρά το προϊόν σε αυξήσεις όλων των συντελεστώ μαζί;
  - Έστω ότι όλοι οι συντελεστές διπλασιάζονται. Θα διπλασιαστεί το προϊόν;
- Οι αποδόσεις κλίμακας έχουν προκαλέσει το ενδιαφέρον των οικονομολόγων από την εποχή του Adam Smith

Αποδόσεις κλίμακας

- Ο A. Smith εντοπίζει δύο δυνάμεις που λειτουργούν καθώς οι συντελεστές διπλασιάζονται
  - Μεγαλύτερος καταμερισμός εργασίας και εξειδίκευση
  - Απώλεια αποτελεσματικότητας επειδή η διοίκηση μπορεί να γίνει πιο δύσκολη όσο πιο μεγάλη η κλίμακα λειτουργίας της επιχείρησης

Αποδόσεις κλίμακας

- Αν η συνάρτηση παραγωγής είναι $q = f(k,l)$ και όλες οι εισροές πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό ($t > 1$), τότε

Επίδραση στο προϊόν	Αποδόσεις κλίμακας
$f(tk,tl) = tf(k,l)$	Σταθερές
$f(tk,tl) < tf(k,l)$	Φθίνουσες
$f(tk,tl) > tf(k,l)$	Αύξουσες

Αποδόσεις κλίμακας

- Είναι δυνατό μια συνάρτηση παραγωγής να παρουσιάζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας για κάποια επίπεδα χρήσης συντελεστών και αύξουσες ή φθίνουσες αποδόσεις σε άλλα επίπεδα.
  - Οι οικονομολόγοι αναφέρονται στο βαθμό των αποδόσεων κλίμακας με την έννοια ότι εξετάζεται ένα μικρό μόνο πεδίο μεταβολής στη χρήση των εισροών και του αντίστοιχου επιπέδου του προϊόντος

Σταθερές αποδόσεις κλίμακας

- Οι συναρτήσεις παραγωγής με σταθερές αποδόσεις κλίμακας είναι ομογενείς πρώτου βαθμού ως προς τις εισροές.

$$f(tk,tl) = t^1 f(k,l) = tq$$

Αυτό σημαίνει ότι οι συναρτήσεις οριακής παραγωγικότητας είναι ομογενείς βαθμού μηδέν.

  - Αν μια συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού k, οι παράγωγοι του είναι συναρτήσεις ομογενείς βαθμού k-1

Σταθερές αποδόσεις κλίμακας

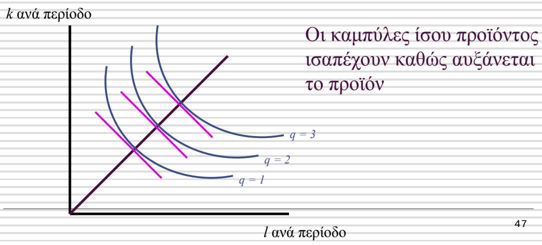
- Η οριακή παραγωγικότητα κάθε συντελεστή εξαρτάται από το λόγο κεφαλαίου και εργασίας (όχι τα απόλυτα επίπεδα αυτών των συντελεστών)
- Ο *RTS* μεταξύ k και l εξαρτάται μόνο από το λόγο του k ως προς το l, όχι την κλίμακα λειτουργίας

Σταθερές αποδόσεις κλίμακας

- Η συνάρτηση παραγωγής θα είναι ομοθετική
- Γεωμετρικά. Όλες οι καμπύλες ίσης παραγωγής είναι η κάθε μια επέκταση της άλλης πάνω σε μια ακτίνα.

Σταθερές αποδόσεις κλίμακας

- Κατά μήκος μιας ακτίνας από την αρχή των αξόνων (σταθερό k/l), ο *RTS* είναι ο ίδιος για όλες τις καμπύλες ίσου προϊόντος



Αποδόσεις κλίμακας

- Οι αποδόσεις κλίμακας μπορεί να γενικευτούν για μια συνάρτηση με n συντελεστές

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

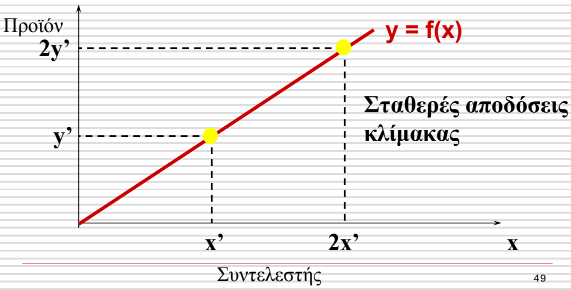
- Αν όλοι οι συντελεστές πολλαπλασιαστούν με μια θετική σταθερά t, έχουμε ότι

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t^k q$$

  - Αν $k = 1$, έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακας
  - Αν $k < 1$, έχουμε φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας
  - Αν $k > 1$, έχουμε αύξουσες αποδόσεις κλίμακας

Αποδόσεις κλίμακας

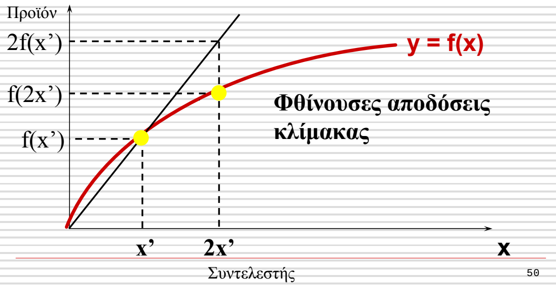
- Ένας συντελεστής, ένα προϊόν



49

Αποδόσεις κλίμακας

- Ένας συντελεστής, ένα προϊόν



50

Αποδόσεις κλίμακας

- Ένας συντελεστής, ένα προϊόν

51

Αποδόσεις κλίμακας

- Ένας συντελεστής, ένα προϊόν

52

Ελαστικότητα υποκατάστασης

- Η **Ελαστικότητα υποκατάστασης** (σ) μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στο *k*/*l* σε σχέση με την ποσοστιαία μεταβολή στον *RTS* κατά μήκος μιας καμπύλης ίσου προϊόντος

$$\sigma = \frac{\%\Delta(k/l)}{\%\Delta RTS} = \frac{d(k/l)}{dRTS}\cdot\frac{RTS}{k/l} = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln RTS}$$

- Η τιμή του σ θα είναι πάντα θετική επειδή *k*/*l* και *RTS* κινούνται στην ίδια κατεύθυνση

53

Ελαστικότητα υποκατάστασης

- Αν σ μεγάλο, ο *RTS* δεν θ’ αλλάξει πολύ σε σχέση με το *k*/*l*
  - Η καμπύλη ίσου προϊόντος θα είναι σχετικά επίπεδη
- Αν σ μικρό, ο *RTS* θ’ αλλάξει πολύ καθώς το *k*/*l* αλλάζει
  - Η καμπύλη ίσου προϊόντος θα είναι πολύ κυρτή
- Είναι δυνατό το σ να αλλάζει κατά μήκος μιας καμπύλης ίσου προϊόντος ή καθώς αλλάζει η κλίμακα παραγωγής

54

Ελαστικότητα υποκατάστασης

- Γενικεύοντας την ελαστικότητα υποκατάστασης για την περίπτωση με πολλούς συντελεστές δημιουργούνται διάφορες περιπλοκές
  - Αν ορίσουμε την ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ δύο συντελεστών να είναι η ποσοστιαία μεταβολή στο λόγο των δύο συντελεστών ως προς την ποσοστιαία μεταβολή στον *RTS*, πρέπει να κρατήσουμε το προϊόν <u>και</u> τα επίπεδα των άλλων συντελεστών σταθερά

55

Η γραμμική συνάρτηση παραγωγής

- Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$q = f(k,l) = ak + bl$$

- Αυτή η συνάρτηση παρουσιάζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας

$$f(tk,tl) = atk + btl = t(ak + bl) = tf(k,l)$$

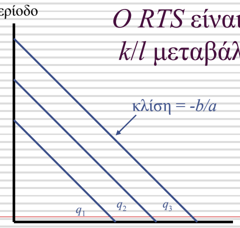
- Όλες οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι ευθείες γραμμές.
  - Ο *RTS* είναι σταθερός
  - $\sigma = \infty$

56

Η γραμμική συνάρτηση παραγωγής

Κεφάλαιο και εργασία είναι τέλεια υποκατάστατα

k ανά περίοδο



Ο *RTS* είναι σταθερός καθώς το *k*/*l* μεταβάλλεται

$\sigma = \infty$

l ανά περίοδο

57

Σταθερές αναλογίες

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = \min(ak, bl) \quad a,b > 0$$

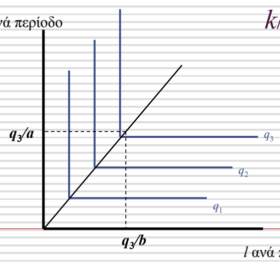
- Το κεφάλαιο και η εργασία πρέπει να χρησιμοποιούνται πάντα σε σταθερή αναλογία
  - Η επιχείρηση λειτουργεί πάντα κατά μήκος μιας ακτίνας όπου το *k*/*l* είναι σταθερό
- Επειδή το *k*/*l* είναι σταθερό, $\sigma = 0$

58

Σταθερές αναλογίες

Καμιά υποκατάσταση μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας δεν είναι δυνατή

k ανά περίοδο



k/*l* είναι σταθερό στο *b*/*a*

$\sigma = 0$

l ανά περίοδο

59

Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = f(k,l) = Ak^a l^b \quad A,a,b > 0$$

- Αυτή η συνάρτηση παραγωγής μπορεί να έχει αποδόσεις κλίμακας

$$f(tk,tl) = A(tk)^a(tl)^b = At^{a+b}k^a l^b = t^{a+b}Af(k,l)$$

  - Αν $a + b = 1 \Rightarrow$ σταθερές αποδόσεις κλίμακας
  - Αν $a + b > 1 \Rightarrow$ αύξουσες αποδόσεις κλίμακας
  - if $a + b < 1 \Rightarrow$ φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας

60

Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

- Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas, εκφρασμένη λογαριθμικά είναι γραμμική

$$\ln q = \ln A + a \ln k + b \ln l$$

  - a είναι η ελαστικότητα του προϊόντος σε σχέση με το k
  - b είναι η ελαστικότητα του προϊόντος σε σχέση με το l

61

Συνάρτηση παραγωγής CES

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = f(k,l) = [k^\rho + l^\rho]^{\gamma/\rho} \quad \rho \leq 1, \rho \neq 0, \gamma > 0$$

  - $\gamma > 1 \Rightarrow$ αύξουσες αποδόσεις κλίμακας
  - $\gamma < 1 \Rightarrow$ φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας
- Γι' αυτή τη συνάρτηση παραγωγής

$$\sigma = 1/(1-\rho)$$

  - $\rho = 1 \Rightarrow$ γραμμική συνάρτηση παραγωγής
  - $\rho = -\infty \Rightarrow$ συνάρτηση παραγωγής με σταθερές αναλογίες
  - $\rho = 0 \Rightarrow$ συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

62

Γενικευμένη συνάρτηση παραγωγής Leontief

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = f(k,l) = k + l + 2(kl)^{0.5}$$

- Οι οριακές παραγωγικότητες είναι

$$f_k = 1 + (k/l)^{-0.5}$$

$$f_l = 1 + (k/l)^{0.5}$$

- Άρα,

$$RTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{1+(k/l)^{0.5}}{1+(k/l)^{-0.5}}$$

63

Τεχνική πρόοδος

- Οι μέθοδοι παραγωγής αλλάζουν διαχρονικά
- Αν ακολουθήσουμε ανώτερες τεχνικές παραγωγής, το ίδιο επίπεδο προϊόντος μπορεί να παραχθεί με λιγότερες ποσότητες συντελεστών
  - Η καμπύλη ίσου προϊόντος μετατοπίζεται προς τα μέσα

64

Τεχνική πρόοδος

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = A(t)f(k,l)$$

όπου $A(t)$ αντιπροσωπεύει όλες τις επιδράσεις που προσδιορίζουν το q εκτός από εκείνες των k και l

  - Μεταβολές στο A διαχρονικά αντιπροσωπεύουν τεχνική πρόοδο
    - Το A παρουσιάζεται ως συνάρτηση του χρόνου (t)
    - $dA/dt > 0$

65

Τεχνική πρόοδος

- Διαφορίζοντας τη συνάρτηση παραγωγής σε σχέση με το χρόνο έχουμε

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dA}{dt}\cdot f(k,l) + A\cdot\frac{df(k,l)}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dA}{dt}\cdot\frac{q}{A} + \frac{q}{f(k,l)}\left[\frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{dk}{dt} + \frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{dl}{dt}\right]$$

66

Τεχνική πρόοδος

- Διαιρώντας με q παίρνουμε

$$\frac{dq/dt}{q}=\frac{dA/dt}{A}+\frac{\partial f/\partial k}{f(k,l)}\cdot\frac{dk}{dt}+\frac{\partial f/\partial l}{f(k,l)}\cdot\frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dq/dt}{q}=\frac{dA/dt}{A}+\frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{k}{f(k,l)}\cdot\frac{dk/dt}{k}+\frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{l}{f(k,l)}\cdot\frac{dl/dt}{l}$$

Τεχνική πρόοδος

- Για κάθε μεταβλητή x, $[(dx/dt)/x]$ είναι ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του x
  - Ας το συμβολίσουμε με G_x
- Τότε, η πιο πάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$G_q=G_A+\frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{k}{f(k,l)}\cdot G_k+\frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{l}{f(k,l)}\cdot G_l$$

Τεχνική πρόοδος

- Αφού

$$\frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{k}{f(k,l)}=\frac{\partial q}{\partial k}\cdot\frac{k}{q}=e_{q,k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{l}{f(k,l)}=\frac{\partial q}{\partial l}\cdot\frac{l}{q}=e_{q,l}$$

$$G_q=G_A+e_{q,k}G_k+e_{q,l}G_l$$

Τεχνική πρόοδος σε συνάρτηση Cobb-Douglas

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q=A(t)f(k,l)=A(t)k^{\alpha}l^{1-\alpha}$$

- Αν υποθέσουμε ότι η τεχνική πρόοδος λαμβάνει χώρα κατά ένα σταθερό εκθέτη (θ) τότε

$$A(t)=Ae^{\theta t}$$
$$q=Ae^{\theta t}k^{\alpha}l^{1-\alpha}$$

Τεχνική πρόοδος σε συνάρτηση Cobb-Douglas

- Αν πάρουμε τους λογαρίθμους και διαφορίσουμε σε σχέση με το t παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial \ln q}{\partial t}=\frac{\partial \ln q}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial q/\partial t}{q}=G_q$$

Τεχνική πρόοδος σε συνάρτηση Cobb-Douglas

$$G_q=\frac{\partial(\ln A+\theta t+\alpha\ln k+(1-\alpha)\ln l)}{\partial t}$$
$$=\theta+\alpha\cdot\frac{\partial \ln k}{\partial t}+(1-\alpha)\cdot\frac{\partial \ln l}{\partial t}=\theta+\alpha G_k+(1-\alpha)G_l$$

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις

- Μακροχρόνια είναι η περίπτωση στην οποία η επιχείρηση δεν έχει περιορισμούς στη χρήση των ποσοτήτων όλων των συντελεστών.
- Μπορεί όμως να υπάρχουν πολλοί περιορισμού.
- Βραχυχρόνια είναι η περίπτωση στην οποία η επιχείρηση δεν μπορεί να μεταβάλει τις ποσότητες όλων των συντελεστών, αλλά μόνο ενός.

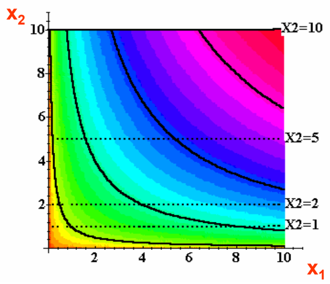
73

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις

- Τι συνεπάγονται οι περιορισμοί βραχυχρόνια στην τεχνολογία της επιχείρησης;
- Έστω ότι ο βραχυχρόνιος περιορισμός σημαίνει το να θεωρηθεί σταθερή η ποσότητα του συντελεστή 2.
- Ο συντελεστής 2 είναι επομένως σταθερός συντελεστής βραχυχρόνια. Ο συντελεστής 1 παραμένει μεταβλητός.

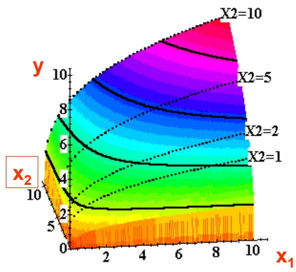
74

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις



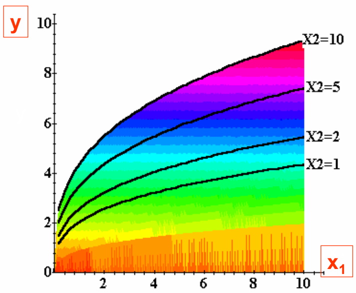
75

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις



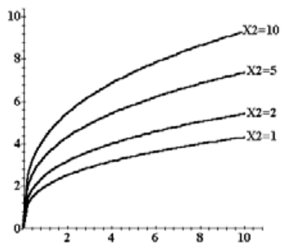
76

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις



77

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις



Τέσσερις βραχυχρόνιες συναρτήσεις παραγωγής

78

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις

$y = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$ Είναι η μακροχρόνια συνάρτηση παραγωγής (x_1 και x_2 είναι μεταβλητά).

Η βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής όταν $x_2 = 1$

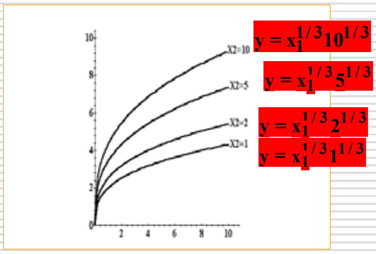
$$y = x_1^{1/3} 1^{1/3} = x_1^{1/3}.$$

Η βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής όταν $x_2 = 10$

$$y = x_1^{1/3} 10^{1/3} = 2 \cdot 15 x_1^{1/3}.$$

79

Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις



80

Σημεία που πρέπει να προσέξετε

- Αν όλοι οι συντελεστές, εκτός από ένα, κρατούνται σταθεροί, μπορούμε να συναγάγουμε μια σχέση μεταξύ της μοναδικής μεταβλητής και του προϊόντος
  - Οριακή φυσική παραγωγικότητα είναι η μεταβολή στο προϊόν, που προκύπτει από την αύξηση κατά μια μονάδα της χρήσης του συντελεστή
    - Η παραγωγικότητα αυτή μειώνεται καθώς αυξάνει η χρήση του συντελεστή

81

Σημεία που πρέπει να προσέξετε

- Η συνάρτηση παραγωγής μπορεί να απεικονιστεί από ένα χάρτη με καμπύλες ίσου προϊόντος
  - Η κλίση της καμπύλης ίσου προϊόντος είναι ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (*RTS*)
    - Δείχνει πως ο ένας συντελεστής μπορεί να αντικαταστήσει τον άλλο, ενώ διατηρείται σταθερό το προϊόν.
    - Είναι ο λόγος των οριακών φυσικών παραγωγικοτήτων των δύο συντελεστών

82

Σημεία που πρέπει να προσέξετε

- Οι καμπύλες ίσου προϊόντος υποτίθεται ότι είναι, συνήθως, κυρτές
  - Υπακούουν στην υπόθεση του φθίνοντος *RTS*
    - Η υπόθεση αυτή δεν μπορεί να εξαχθεί αποκλειστικά από την υπόθεση της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας
    - Πρέπει επίσης να ενδιαφερόμαστε για τις επιδράσεις της μεταβολής ενός συντελεστή στην οριακή παραγωγικότητα των άλλων συντελεστών

83

Σημεία που πρέπει να προσέξετε

- Οι αποδόσεις κλίμακας που έχει μια συνάρτηση παραγωγής δείχνουν πως το προϊόν αντιδρά στις αναλογικές αυξήσεις όλων των συντελεστών
  - Αν το προϊόν αυξάνει αναλογικά με τους συντελεστές, έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακας

84

Σημεία που πρέπει να προσέξετε

- Η ελαστικότητα υποκατάστασης (σ) δίνει ένα μέτρο του πόσο εύκολα μπορούμε να υποκαταστήσουμε στην παραγωγή ένα συντελεστή με έναν άλλο.
  - Υψηλή σ συνεπάγεται σχεδόν ευθείες καμπύλες ίσου προϊόντος
  - Χαμηλή σ συνεπάγεται καμπύλες ίσου προϊόντος με σχήμα L

Σημεία που πρέπει να προσέξετε

- Η τεχνική πρόοδος μετατοπίζει ολόκληρη τη συνάρτηση παραγωγής και το χάρτη καμπυλών ίσου προϊόντος
  - Τεχνικές βελτιώσεις μπορεί να ανακύψουν από τη χρήση πιο παραγωγικών συντελεστών ή καλύτερων μεθόδων οικονομικής οργάνωσης