

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Κεφάλαιο 5





Συνάρτηση παραγωγής

Προσδιορίζει τις δυνατότητες παραγωγής ενός αγαθού ή υπηρεσίας (εκροής) ως συνάρτησης των παραγωγικών συντελεστών (εισροών) δεδομένης της τεχνολογίας.

Η χρονική παράμετρος:

Καθώς ο χρόνος είναι μια σημαντική παράμετρος που προσδιορίζει την ικανότητα μιας επιχείρησης να αντιδράσει σε αλλαγές στην ζήτηση εξετάζουμε την συνάρτηση παραγωγής σε δυο διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες.

1. Βραχυχρόνιο διάστημα (short run) είναι το διάστημα κατά το οποίο οι ποσότητες κάποιων εισροών (συνήθως κεφάλαιο) είναι σταθερές ενώ κάποιων άλλων εισροών (συνήθως εργασία) είναι μεταβλητές.
2. Μακροχρόνιο διάστημα (long run) είναι το διάστημα κατά το οποίο οι ποσότητες όλων των εισροών είναι μεταβλητές.



Συνάρτηση παραγωγής

Γενική μορφή βραχυχρόνιας συνάρτησης παραγωγής:

$$Q = f (\underbrace{M_1, M_2, M_3, \dots}_{\text{μεταβλητές εισροές}} \dots \underbrace{\Sigma_1, \Sigma_2}_{\text{σταθερές εισροές}})$$

Γενικές μορφές παραγωγικής διαδικασίας:

1. συνεχής παραγωγικής διαδικασίας (process production)
2. παραγωγή κατά παραγγελία (custom-order production)
3. δύσκαμπτης μαζικής παραγωγής (rigid mass production)
4. ευέλικτης μαζικής παραγωγής (flexible mass production)



Συνάρτηση παραγωγής

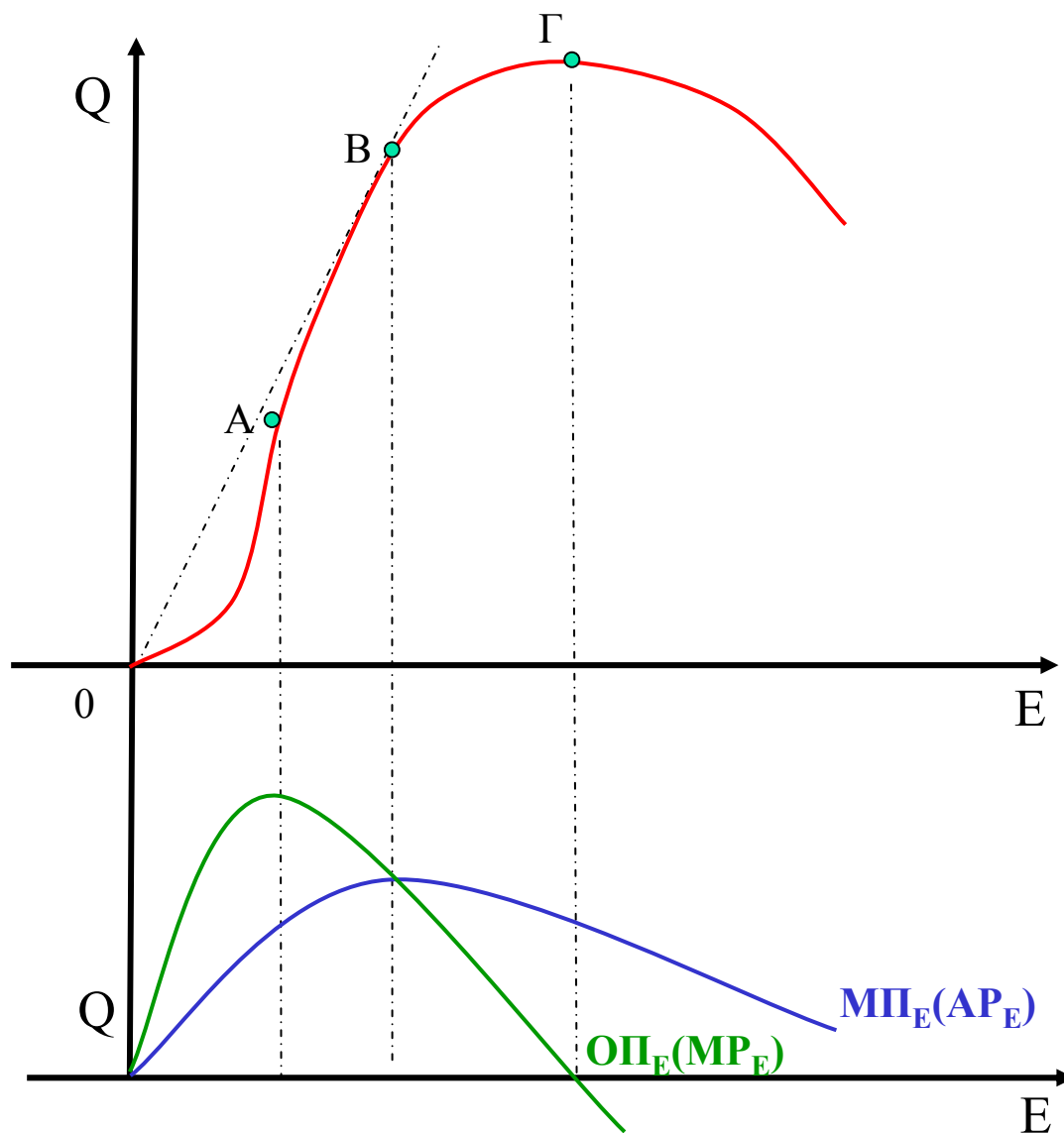
Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

Υποθέσεις: ένα προϊόν (εκροή)
δύο εισροές, εργασία και κεφάλαιο
πολλαπλασιαστική συνάρτηση

$$Q = A K^{\alpha} E^{\beta}$$

όπου: K : κεφάλαιο
E (ή L): εργασία
 α, β : παράμετροι (λόγος ποσοστιαίας μεταβολής Q όταν μεταβάλλεται είτε το K είτε το E μονομερώς)
A: εξωγενής παράμετρος (τεχνολογία)

Βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής



Νόμος της φθίνουσας απόδοσης: Ενώ αρχικά (μεταξύ των σημείων 0 και A) το παραγόμενο προϊόν αυξάνει με αύξων ρυθμό καθώς αυξάνεται η μεταβλητή εισροή, η μεταβολή του συνολικού προϊόντος τείνει να φθίνει μετά από κάποιο επίπεδο αύξησης της μεταβλητής εισροής (μετά το σημείο A).

Σημείο A : σημείο καμπής της καμπύλης παραγωγής

Σημείο B : σημείο στο οποίο μέσο και οριακό προϊόν εργασίας είναι ίσα

Σημείο Γ : οριακό προϊόν εργασίας ίσο με μηδέν



Βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής

$$\text{ΜΠ}_E (\text{ΑΡ}_L) = \frac{Q}{E} = \frac{AK^\alpha E^\beta}{E} = AK^\alpha E^{\beta-1}$$

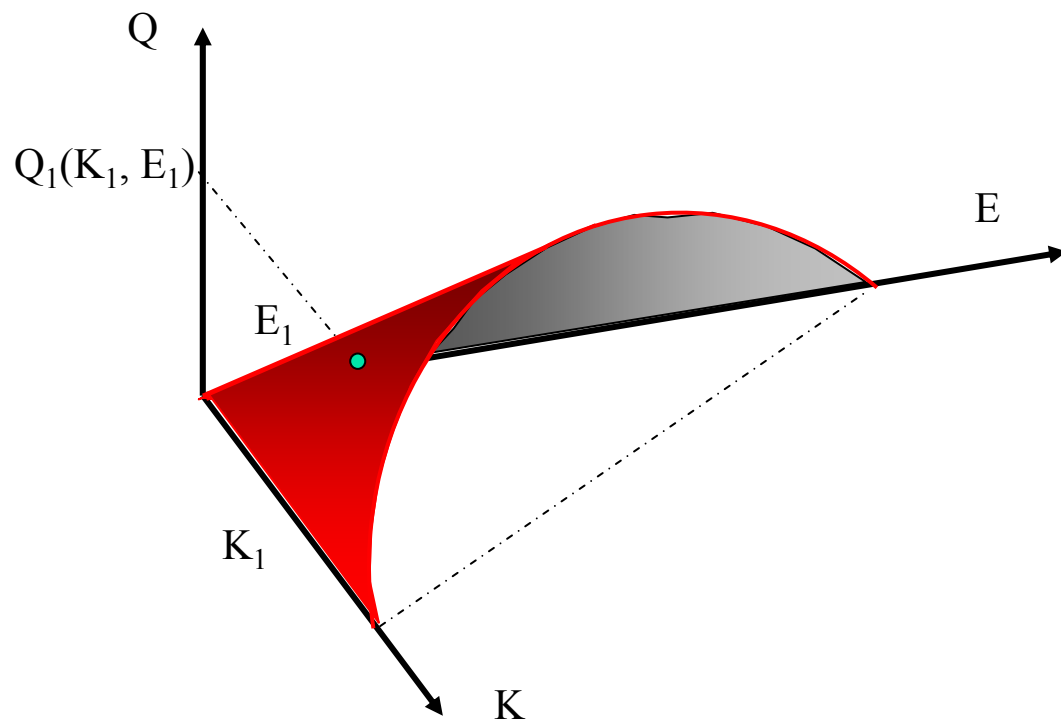
$$\text{ΟΠ}_E (\text{ΜΡ}_L) = \frac{\partial Q}{\partial E} = \beta AK^\alpha E^{\beta-1}$$

$$\text{για } \text{ΟΠ}_E > \text{ΜΠ}_E \quad \Rightarrow \quad \beta AK^\alpha E^{\beta-1} > AK^\alpha E^{\beta-1} \quad \Rightarrow \quad \beta > 1$$

$$\text{για } \text{ΟΠ}_E = \text{ΜΠ}_E \quad \Rightarrow \quad \beta = 1$$

$$\text{για } \text{ΟΠ}_E < \text{ΜΠ}_E \quad \Rightarrow \quad \beta < 1$$

Μακροχρόνια συνάρτηση παραγωγής



Η επιφάνεια παραγωγής δίνει όλα τα δυνατά επίπεδα παραγωγής από τους συνδυασμούς των δύο μεταβλητών εισροών.

Το επίπεδο παραγωγής Q_1 προκύπτει από τον συνδυασμό E_1 και K_1 μονάδων εργασίας και κεφαλαίου αντίστοιχα.



Μακροχρόνια συνάρτηση παραγωγής

Αποδόσεις κλίμακας παραγωγής

1. Σταθερές αποδόσεις κλίμακας (constant returns to scale) έχουμε, όταν μια αύξηση κατά ένα ποσοστό των εισροών αποφέρει αύξηση της εκροής κατά το ίδιο ποσοστό
2. Αύξουσες αποδόσεις κλίμακας (increasing returns to scale) όταν η εκροή αυξάνεται κατά ένα μεγαλύτερο ποσοστό από την ποσοστιαία αύξηση των εισροών
3. Φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας (decreasing returns to scale) όταν η εκροή αυξάνεται κατά ένα μικρότερο ποσοστό από την ποσοστιαία αύξηση των εισροών



Μακροχρόνια συνάρτηση παραγωγής

Αποδόσεις κλίμακας παραγωγής (Cobb-Douglas)

$$Q = AK^\alpha E^\beta$$

$$\begin{aligned} A(\mu K)^\alpha (\mu E)^\beta &= A\mu^{\alpha+\beta} K^\alpha E^\beta \\ &= \mu^{\alpha+\beta} AK^\alpha E^\beta \\ &= \mu^{\alpha+\beta} Q \end{aligned}$$

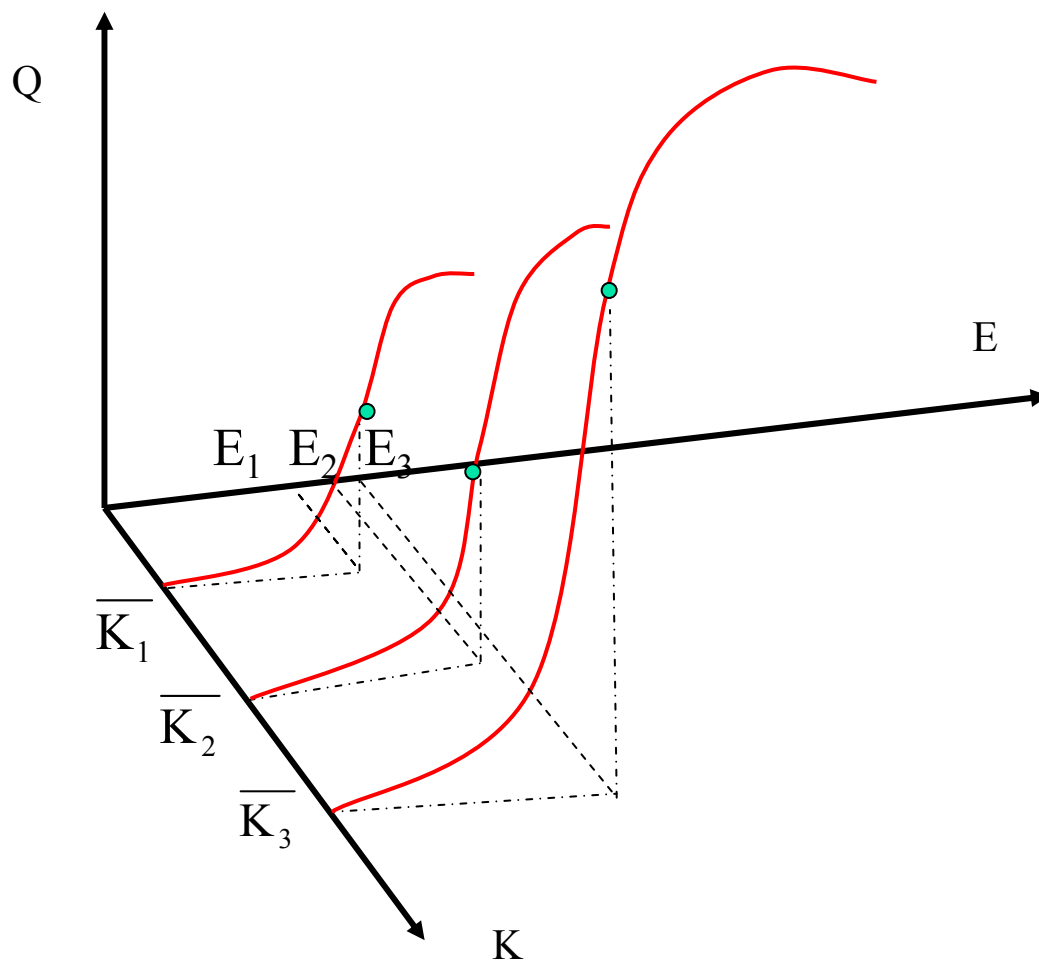
Επομένως

εάν $\alpha + \beta > 1$ έχουμε αύξουσες αποδόσεις

εάν $\alpha + \beta = 1$ έχουμε σταθερές αποδόσεις

εάν $\alpha + \beta < 1$ έχουμε φθίνουσες αποδόσεις

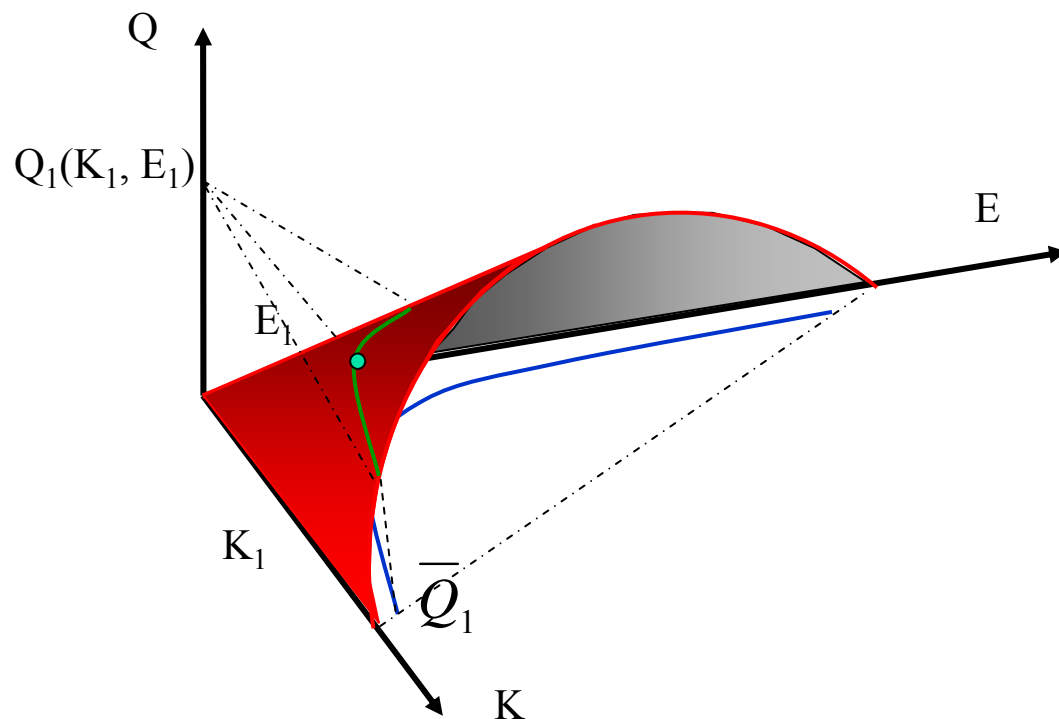
Μακροχρόνια συνάρτηση παραγωγής



Οι βραχυχρόνιες καμπύλες παραγωγής δείχνουν την φθίνουσα απόδοση της εργασίας.

Καθώς όμως αυξάνεται το κεφάλαιο κάθε εργαζόμενος γίνεται πιο αποδοτικός. (Το σημείο καμπής των καμπυλών προκύπτει σε μεγαλύτερο επίπεδο εργασίας καθώς αυξάνεται το κεφάλαιο)

Καμπύλες ίσου προϊόντος

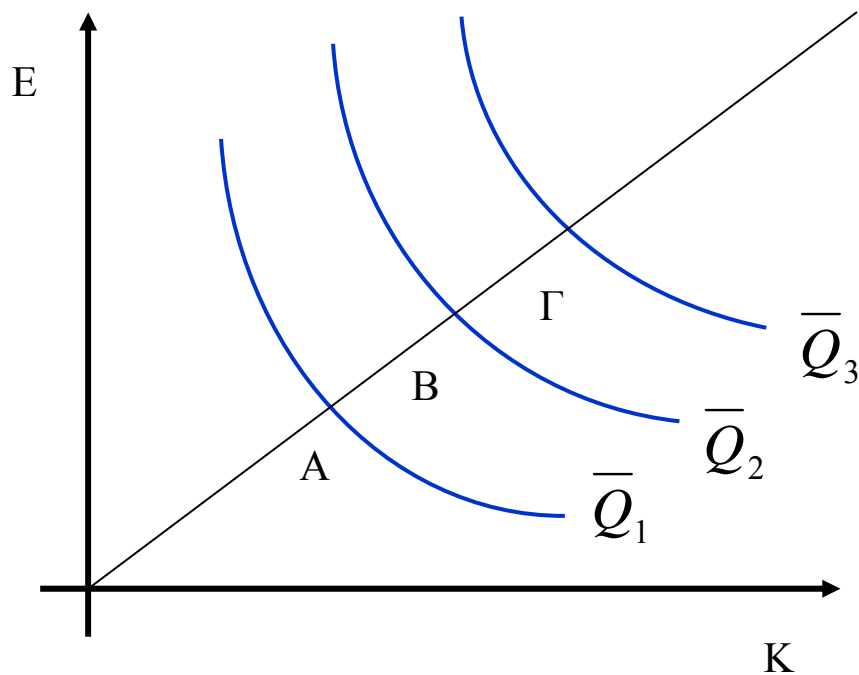


Οι καμπύλες ίσου
προϊόντος

Η ποσότητα προϊόντος Q_1 μπορεί να παραχθεί και με άλλους συνδυασμούς εισροών πέρα από τον (K_1, E_1) που είδαμε προηγουμένως.

Το σύνολο των συνδυασμών εισροών που παράγουν προϊόν ίσο με Q_1 μας δίνουν την καμπύλη ίσου προϊόντος Q_1

Καμπύλες ίσου προϊόντος



Οι καμπύλες ίσου προϊόντος (καμπύλες ισοπαραγωγής) δείχνουν τους συνδυασμούς των δύο εισροών οι οποίοι παράγουν μια δεδομένη ποσότητα της εκροής.



Καμπύλες ίσου προϊόντος

Ιδιότητες καμπυλών ίσου προϊόντος:

1. Αρνητική κλίση (χρησιμοποιούνται συνδυασμοί εκροών οι οποίοι δεν οδηγούν σε σπατάλη των εισροών). Έτσι ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο της τεχνολογικής αποτελεσματικότητας (technical efficiency).
2. Δεν τέμνονται μεταξύ τους.
3. Όσο μακρύτερα από την αρχή των αξόνων τόσο μεγαλύτερη η ποσότητα της εκροής.
4. Η κλίση τους μειώνεται κατά μήκος τους από επάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά.
5. $AB > BG$ φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας
 $AB = BG$ σταθερές αποδόσεις κλίμακας
 $AB < BG$ αύξουσες αποδόσεις κλίμακας



Καμπύλες ίσου προϊόντος

Κλίση της καμπύλης ίσου προϊόντος (Cobb-Douglas $Q = AK^\alpha E^\beta$)

Η συνολική αλλαγή του Q όταν αλλάζουν τα K και E είναι:

$$d\bar{Q} = \frac{\partial(AK^\alpha E^\beta)}{\partial K} dK + \frac{\partial(AK^\alpha E^\beta)}{\partial E} dE$$

Για να μείνουμε στην ίδια καμπύλη ισοπαραγωγής: $d\bar{Q} = 0$

Επομένως,

$$0 = (O\Pi_K) dK + (O\Pi_E) dE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dK} = -\frac{O\Pi_K}{O\Pi_E} = -\frac{A\alpha K^{\alpha-1} E^\beta}{A\beta K^\alpha E^{\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{\frac{K^\alpha E^\beta}{K}}{\frac{K^\alpha E^\beta}{E}} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{E}{K}$$



Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης

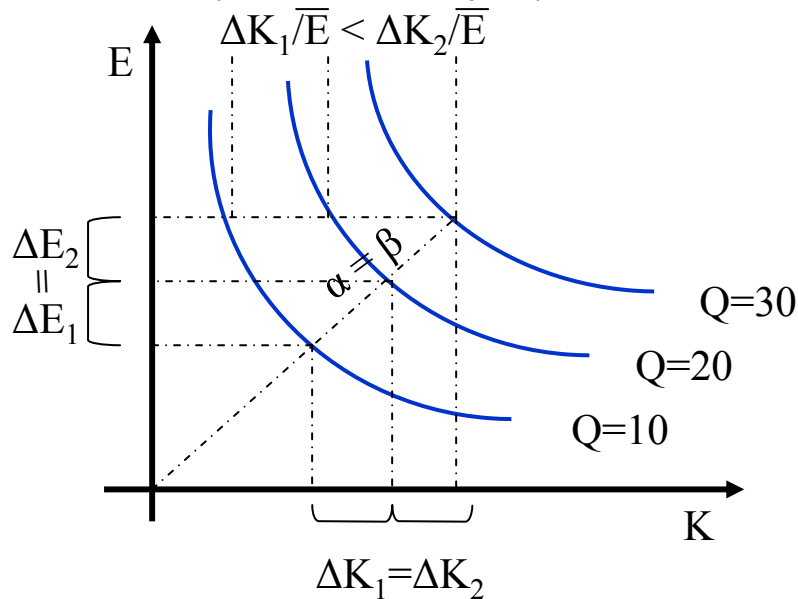
Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (ΟΛΤΥ) (marginal rate of technical substitution) είναι ο λόγος των μεταβολών των ποσοτήτων των συντελεστών κατά μήκος μιας καμπύλης ισοπαραγωγής (= αντίστροφο του λόγου των οριακών προϊόντων) (= κλίση της καμπύλης ισοπαραγωγής σε οποιοδήποτε σημείο)

Συντελεστής εισροής (input coefficient) είναι το αντίστροφο του οριακού προϊόντος ($1/OΠ_K$ και $1/OΠ_E$) για κεφάλαιο και εργασία αντίστοιχα.

Αποδόσεις κλίμακας

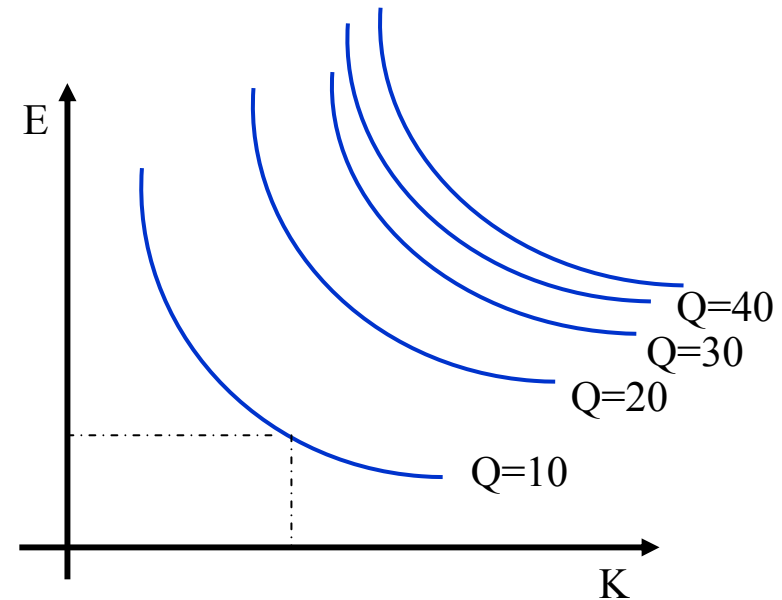
Αποδόσεις κλίμακας και καμπύλες ίσου προϊόντος

Βραχυχρόνια έχουμε αρχικά
αύξουσα απόδοση κεφαλαίου



(α) Σταθερές αποδόσεις κλίμακας

Αυξήσεις των εισροών έχουν σαν αποτέλεσμα την αύξηση του προϊόντος κατά το ίδιο ποσοστό

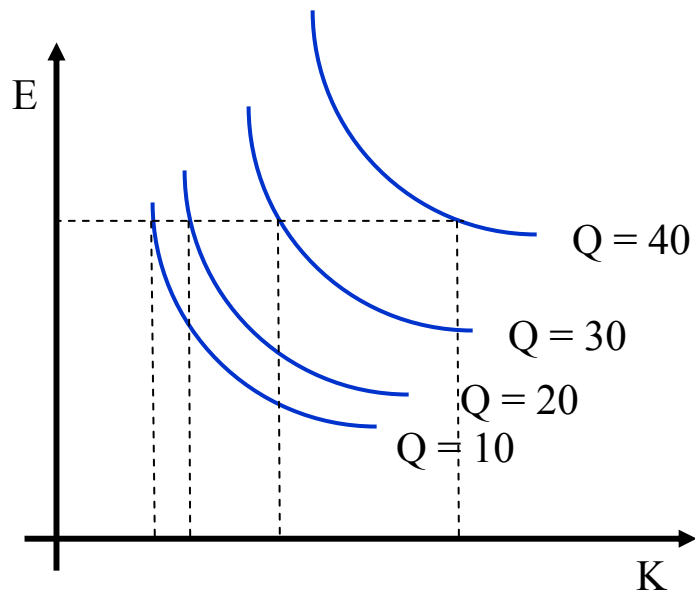


(β) Αύξουσες αποδόσεις κλίμακας

Αυξήσεις των εισροών έχουν σαν αποτέλεσμα την αύξηση του προϊόντος κατά μεγαλύτερο ποσοστό

Αποδόσεις κλίμακας

Αποδόσεις κλίμακας και καμπύλες ίσου προϊόντος

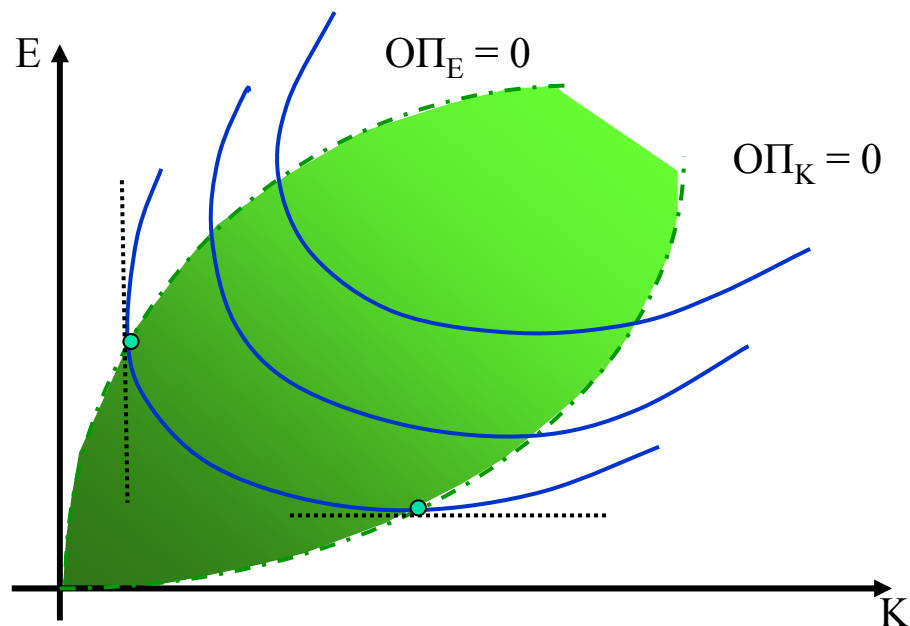


(γ) Φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας

Η ύπαρξη φθίνουσας απόδοσης φαίνεται από τις καμπύλες ίσου προϊόντος με σταθερές αποδόσεις κλίμακος. Στην περίπτωση αυτή για σταθερό επίπεδο E, για να αυξηθεί το προϊόν χρειάζεται ολοένα και μεγαλύτερη ποσότητα του συντελεστή K.

Τεχνικά αποτελεσματικοί συνδυασμοί

Τεχνικά αποτελεσματικοί συνδυασμοί παραγωγής



Οι περιοχές των καμπυλών ίσου προϊόντος στις οποίες το οριακό προϊόν είναι θετικό αλλά φθίνον, μας δίνουν τους τεχνικά αποτελεσματικούς συνδυασμούς εισροών.



Ομογενείς συναρτήσεις

Ομογενείς συναρτήσεις

$$Q = f(K, E)$$

$$f(\rho K, \rho E) = \rho^v f(K, E) = \rho^v Q$$

$v = 1$: ομογενής πρώτου βαθμού (γραμμική)
σταθερές αποδόσεις κλίμακας

$v > 1$: αύξουσες αποδόσεις κλίμακας

$0 < v < 1$: φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας



Θεώρημα Euler

Θεώρημα Euler

Για μια γραμμική ομογενή συνάρτηση

$$vQ = E MP_E + K MP_K$$

παράδειγμα:

$$f(\rho E, \rho K) = \rho^v f(E, K) \quad \left. \vphantom{f(\rho E, \rho K)} \right\} \Rightarrow Ef_E + Kf_K = v\rho^{v-1} f(E, K)$$

Διαφοροποίηση ως προς ρ

$$Ef_E + Kf_K = v\rho^{v-1} f(E, K) \quad \left. \vphantom{Ef_E + Kf_K} \right\} \Rightarrow Ef_E + Kf_K = vf(E, K) = vQ$$

εάν $\rho = 1$

όταν $v = 1$, τότε: $Q = EMP_E + KMP_K$



Θεώρημα Euler

.....

Στην περίπτωση αυτή

$$AP_E = \frac{Q}{E} = MP_E + \frac{K}{E} MP_K \Rightarrow \frac{K}{E} MP_K = AP_E - MP_E$$

Επομένως

$MP_E < AP_E$	εάν και μόνον εάν	$MP_K > 0$
$MP_E = AP_E$	εάν και μόνον εάν	$MP_K = 0$
$MP_E > AP_E$	εάν και μόνον εάν	$MP_K < 0$

Επομένως ο προσδιορισμός των AP και MP τον οποίο κάναμε στο αρχικό σχήμα μόνο για γραμμική ομογενή συνάρτηση παραγωγής.



Ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης

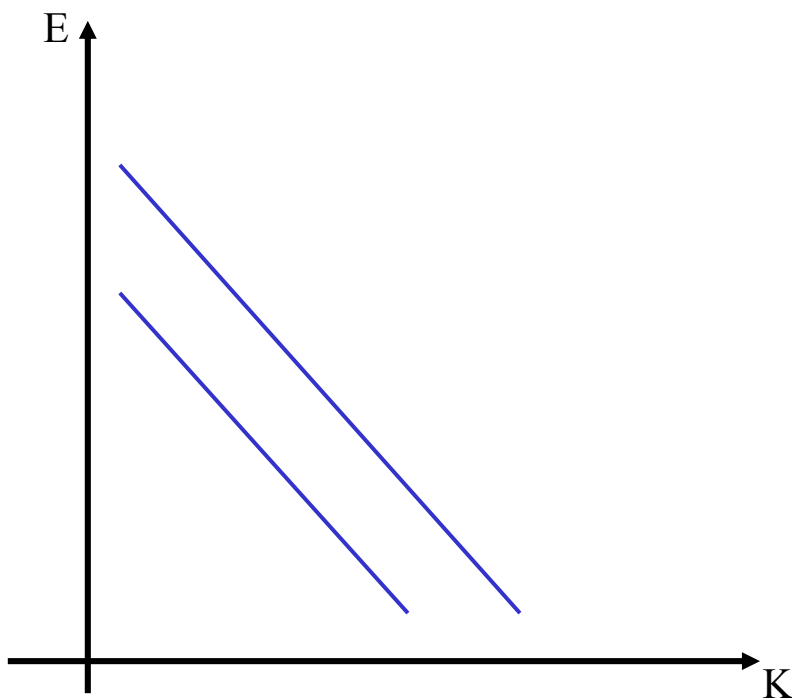
Ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης
(elasticity of technical substitution)

$$\text{Ελαστικότητα} = \frac{\frac{\Delta \left(\frac{E}{K} \right)}{\frac{E}{K}}}{\Delta \frac{O\Lambda T Y_{KE}}{O\Lambda T Y_{KE}}}$$

Δίνει ένα μέτρο της δυνατότητας υποκατάστασης μεταξύ συντελεστή.

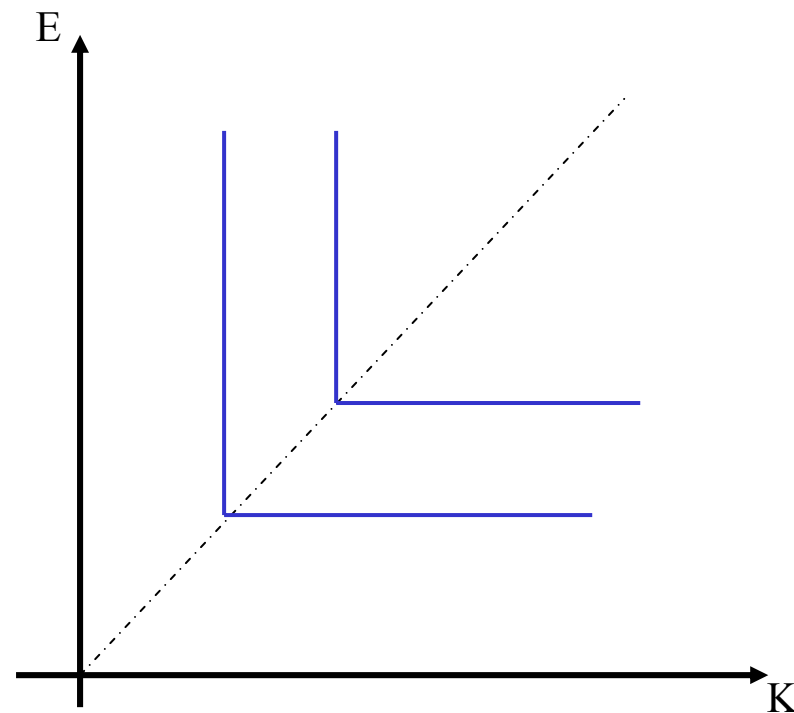
Καμπύλες ίσου προϊόντος

Ιδιαίτερες περιπτώσεις καμπυλών ίσου προϊόντος



Πλήρως υποκατάστατοι συντελεστές

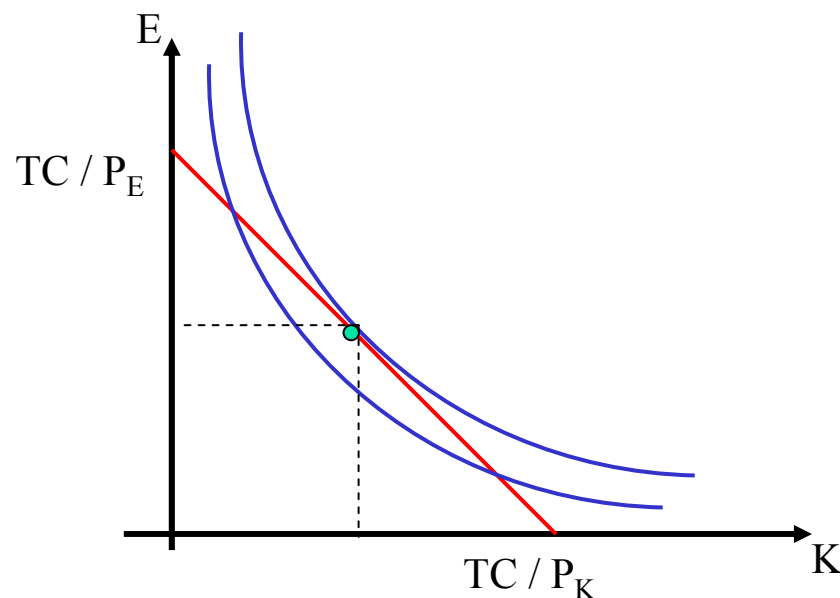
Ελαστικότητα $T_Y = \infty$



Συντελεστές σε σταθερή αναλογία

Ελαστικότητα $T_Y = 0$

Παραγωγή με δεδομένο κόστος



Η επιχείρηση παράγει το μέγιστο δυνατό προϊόν δεδομένου του TC, όταν

$$\frac{MP_K}{MP_E} = \frac{P_K}{P_E}$$

Ας υποθέσουμε ότι μια επιχείρηση έχει δεδομένο χρηματικό ποσό να δαπανήσει για εισροές (E και K).

Τότε μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση ίσου κόστους:

$$TC = P_K \cdot K + P_E \cdot E$$

Η οποία έχει κλίση $= -T_K / T_E$



Παραγωγή με δεδομένο κόστος

Μαθηματική προσέγγιση

Δεδομένου του συνολικού κόστους TC

$$\max_Q \quad Q = f(E, K)$$

$$\text{st.} \quad TC = P_E \cdot E + P_K \cdot K$$

$$\max \quad L = f(E, K) + \lambda (TC - P_E E - P_K K)$$

$$\partial L / \partial E \Rightarrow \partial f / \partial E - \lambda P_E = 0 \quad \Rightarrow f_E = \lambda P_E$$

$$\partial L / \partial K \Rightarrow \partial f / \partial K - \lambda P_K = 0 \quad \Rightarrow f_K = \lambda P_K$$

$$\partial L / \partial \lambda \Rightarrow TC = P_E E + P_K K$$



Παραγωγή με δεδομένο κόστος

Παράδειγμα:

Εάν η συνάρτηση παραγωγής είναι: $Q = 20K + 65E - 0.5 K^2 - 0.5 E^2$

Το συνολικό κόστος: $\Sigma K = \text{€ } 220,000$

Οι τιμές των συντελεστών παραγωγής: $P_K = \text{€ } 2.000$
 $P_E = \text{€ } 5.000$

Βρείτε τον άριστο συνδυασμό K και E ο οποίος μεγιστοποιεί την παραγωγή για το δεδομένο κόστος.